Nombres de Schur classiques et faibles

Fanasina Alinirina Rafilipojaona

Université Lille Nord de France
Pôle de Recherche
et d'Enseignement Supérieur

ulco UNIVERSITÉ DU LITTORAL CÔTE D'OPALE

Université du Littoral Côte d'Opale

N° attribué par la bibliothèque

THÈSE

pour obtenir le grade de

Docteur

Spécialité : **Mathématiques**

préparée au laboratoire **de Mathématiques Pures et Appliquées Joseph Liouville**

dans le cadre de l'École Doctorale **Pour l'Ingénieur Université Lille Nord-de-France**

présentée et soutenue publiquement
par

Fanasina Alinirina RAFILIPOJAONA

le 10 Juillet 2015

Titre :
Nombres de Schur classiques et faibles

Directeur de thèse : **Shalom ELIAHOU**

Rapporteurs

M. Sukumar Das ADHIKARI
M. Jean Paul ALLOUCHE

Jury

M. Loïc FOISSY,	Examinateur
M. Florent HIVERT,	Examinateur
M. Denis ROBILLIARD,	Examinateur
M. Nicolas THIERY,	Examinateur
M. Jean Paul ALLOUCHE,	Rapporteur
M. Shalom ELIAHOU,	Directeur de thèse

Remerciements

Ma reconnaissance va tout d'abord à Dieu Tout puissant car "En Dieu résident la sagesse et la puissance. Le conseil et l'intelligence lui appartiennent."(Job 12.13).
Il est donc la source de toutes les connaissances : que Son Nom soit loué à jamais !
Je tiens ensuite à remercier vivement Shalom Eliahou, qui m'a dirigé dans la préparation de ma thèse. Malgré ses nombreuses obligations, il m'a accordé son temps pour me donner des directives utiles, des conseils judicieux et du soutien encourageant : j'en suis profondément reconnaissant.
Je remercie tous les collègues du Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées Joseph Liouville, surtout le Groupe de Travail Algèbre, pour leurs conseils et suggestions qui ont contribué à la réalisation de ma thèse. Je voudrais remercier plus particulièrement Jean Fromentin, qui m'a beaucoup aidé en m'introduisant le langage C/C++ ainsi que quelques algorithmes de recherches.
Je remercie les rapporteurs, Sukumar Das Adhikari et Jean Paul Allouche, d'avoir accepté la lourde tâche de lire cette thèse, et d'en tirer un compte rendu.
Je remercie également Loïc Foissy, Florent Hivert, Denis Robillard et Nicolas Thiery d'avoir bien voulu accepter de participer au jury.
Je remercie tous mes amis en France pour la fraternité et leur soutien qui ont contribué dans la préparation de ma thèse.
Je remercie également mes amis à Madagascar pour leur soutien en prières.
Enfin, je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à toutes mes familles, à mes parents, à mon frère, à mon beau-frère et à ma soeur qui m'ont aidé et soutenu, avec un amour inconditionnel, durant mes études.

Résumé

Le thème central de cette thèse porte sur des partitions en n parties de l'intervalle entier $[1, N] = \{1, 2, \ldots, N\}$ excluant la présence, dans chaque partie, de solutions de l'équation $x + y = z$ dans le cas classique, ou seulement de telles solutions avec $x \neq y$ dans le cas faible. Pour n donné, le plus grand N admissible dans le cas classique se note $S(n)$ et s'appelle le *n-ème nombre de Schur* ; dans le cas faible, il se note $WS(n)$ et s'appelle le *n-ème nombre de Schur faible*. Bien qu'introduits il y a plusieurs décennies déjà, et même il y a un siècle dans le cas classique, on ne sait encore que très peu de choses au sujet de ces nombres. En particulier, $S(n)$ et $WS(n)$ ne sont exactement connus que pour $n \leq 4$.

Cette thèse est composée de deux chapitres : le premier revisite des encadrements connus sur les nombres de Schur classiques et faibles, et le second est consacré à la construction de nouveaux minorants des nombres de Schur faibles $WS(n)$ pour $n = 7, 8$ et 9.

Nous introduisons, dans le premier chapitre, les ensembles t-libres de sommes, $t \in \mathbb{N}$, dont l'utilisation permet de généraliser et d'unifier diverses démonstrations de majorants des $S(n)$ et $WS(n)$. Nous obtenons également une relation entre $WS(n+1)$ et $WS(n)$.

Dans le deuxième chapitre, nous initions l'étude de certaines partitions hautement structurées présentant un potentiel intéressant pour le problème de minorer les nombres $WS(n)$. Effectivement, avec des algorithmes de recherche ne portant que sur ces partitions, nous retrouvons les meilleurs minorants connus sur $WS(n)$ pour $1 \leq n \leq 6$, et nous améliorons significativement ceux pour $7 \leq n \leq 9$.

Table des matières

		3
Résumé		**5**
Table des matières		**7**
Introduction		**9**
1	**Encadrements des nombres $S(k)$ et $WS(k)$**	**13**
1	Nombres de Ramsey	13
2	Nombres de Schur	19
3	Nombres de Schur faibles	27
4	Comparaison entre $WS(k+1)$ et $WS(k)$	29
5	Les ensembles t-libres de sommes	31
5.1	Majorants de $S_t(k)$	34
5.2	$S_t(k)$ et les nombres de Ramsey	41
2	**Minorants de $WS(k)$ pour $k = 7, 8, 9$**	**45**
1	Structure des parties	46
1.1	Intervalles troués spéciaux	47
1.2	Ensembles semi-spéciaux	49
1.3	Ensemble spécial	51
1.4	Partitions spéciales	55
2	Formules de quelques sommes restreintes	56
2.1	Sommes restreintes de deux ensembles finis	56
2.2	Sommes restreintes de deux intervalles spéciaux dans un ensemble spécial	60
3	Structure globale	64
3.1	Combinatoire des mots	64
3.2	Une application de contraction sur les mots	65
3.3	Le palindrome $s(a, b)$	66
3.4	Suite de couleurs d'une partition	66
3.5	Partition contrainte	68
4	Algorithmes de recherche de partitions	68
4.1	Recouvrements et partitions	68
4.2	Initialisation	69
4.3	Algorithme de recherche de partitions spéciales	70

4.4 Algorithme de recherche de k-partitions spéciales contraintes par le palindrome $s(a, k)$ 72
5 Meilleures partitions obtenues 75
5.1 5 et 6-coloriages 75
5.2 7-coloriages 76
5.3 8-coloriages 77
5.4 9-coloriages 78
5.5 Le cas $k = 10$ 80
6 Récapitulation 80

Bibliographie **83**

Introduction

En combinatoire, on est souvent amené à déterminer combien d'éléments d'une certaine structure doivent être considérés pour qu'une propriété particulière se vérifie. Dans cette thèse, nous utilisons principalement les intervalles d'entiers comme structure. Nous allons étudier quelques exemples de propriétés qui définissent des nombres particuliers.

Pour un entier positif k, le nombre de Schur $S(k)$ est défini comme étant le plus grand entier n tel qu'il existe un k-coloriage de l'intervalle entier $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ qui n'a pas de solution monochromatique de l'équation $(E_1) : x + y = z$. Présentés par Schur dans [18] en 1916, ces nombres sont exactement connus jusqu'à $k = 4$. Nous avons

$$S(1) = 1,\ S(2) = 4,\ S(3) = 13,\ S(4) = 44.$$

En 1965, L.D. Baumert [9] a montré par ordinateur la valeur de $S(4)$. Pour $k = 5, 6$ et 7, on sait seulement que

$$160 \leq S(5) \leq 305, \quad S(6) \geq 536 \text{ et } S(7) \geq 1680.$$

Ce minorant de $S(5)$ est donné dans [7] par G.Exoo et le majorant est une application pour $k = 5$ d'une relation dans [15]. Puis les minorants de $S(6)$ et $S(7)$ sont établis par Harold Fredricksen et Melvin M. Sweet dans [8]. Et en général pour $k \in \mathbb{N}$, Schur a donné l'encadrement de $S(k)$ suivant pour tout k :

$$\frac{3^k - 1}{2} \leq S(k) < [k! \cdot e].$$

Nous pouvons aussi considérer les $S(k)$ comme minorants des nombres de Ramsey. Le nombre de Ramsey $R(t; k)$ pour $t, k \in \mathbb{N}$, est le plus petit entier n tel que pour tout k-coloriage de tous les sous-ensembles de $[n]$ de cardinal deux, il existe un sous-ensemble $T \subseteq [n]$ de cardinal t tel que tous les sous-ensembles de cardinal deux de T ont la même couleur. S.P. Radziszowski a donné dans [15], voir aussi [10] :

$$S(k) \leq R(3; k) - 2,$$

c'est-à-dire, le nombre de Ramsey $R(3; k)$ est supérieur à $S(k)$.

Le nombre de Schur faible $WS(k)$, pour un $k \in \mathbb{N}^*$, est défini comme le plus grand entier n tel qu'il existe un k-coloriage de $[n]$ qui n'a pas de solution monochromatique de l'équation $(E_2) : x + y = z$ avec $x \neq y$.

Là encore, ces nombres ne sont connus que pour $k \leq 4$:

$$WS(1) = 2,\ WS(2) = 8,\ WS(3) = 23,\ WS(4) = 66.$$

La valeur de $WS(4)$ est donnée dans [3]. Voir aussi [12], [14]. De même que sur $S(k)$, pour $k = 5$ et 6, on sait seulement que

$$WS(5) \geq 196 \text{ et } WS(6) \geq 582.$$

Ces deux minorants sont donnés respectivement dans [5] et [6]. Notons que pour $k \in \mathbb{N}^*$ en général, nous avons

$$WS(k) \geq S(k),$$

puisque toutes les solutions de (E_2) sont des solutions de (E_1). P. Bornsztein a montré dans [4] que

$$WS(k) < k! \cdot k \cdot e.$$

Nous avons aussi, voir par exemple [19], comme majorants de $WS(k)$, $k \in \mathbb{N}^*$:

$$WS(k) \leq R(4; k) - 2.$$

Nous introduisons le nombre $S_t(k)$, pour $t, k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, qui est le plus grand entier n tel qu'il existe un k-coloriage de $[n]$ qui a au plus t solutions de (E_a) : $x + a = y$ de même couleur que a, pour tout $a \in [n]$. Ce nombre $S_t(k)$ permet de redémontrer et unifier les majorants de $S(k)$ et $WS(k)$ mais aussi donner des nouveaux minorants des nombres de Ramsey $R(t; k)$ pour $t, k \in \mathbb{N}$. Nous avons

$$S_t(k) \leq R(t + 3; k) - 2,$$

avec $S_0(k) = S(k)$ et $S_1(k) \geq WS(k)$.

Concernant les minorants de $WS(k)$, nous ne connaissons actuellement que ceux indiqués précédemment. Notre principale contribution dans cette thèse est de fournir de meilleurs minorants de $WS(k)$, $7 \leq k \leq 9$. Explicitement, nous obtiendrons les minorants suivants :

$$WS(7) \geq 1740, \quad WS(8) \geq 5201, \quad WS(9) \geq 15596.$$

Ceci est réalisé en se concentrant sur des intervalles entiers très spéciaux, qui sont ensuite implémentés dans un algorithme de recherche spécialisé.

Cette thèse est composée de deux chapitres : le premier revisite des encadrements connus des nombres de Schur classiques et faibles, et le second est consacré à la construction de nouveaux minorants des 7,8 et 9 ieme nombres de Schur faibles.

Dans le premier chapitre, nous rappelons dans la section 1, quelques propriétés des nombres de Ramsey. Dans la section 2, nous étudions les nombres de Schur classiques en rappelant quelques encadrements les plus connus ainsi qu'une amélioration des minorants dans le cas général. Dans la section 3, nous nous focalisons sur les nombres de Schur faibles en faisant aussi des rappels sur les relations connues. Dans la section 4, nous donnons une nouvelle relation entre $WS(k)$ et $WS(k+1)$. Et dans la dernière section 5 de cette partie, nous étudions les ensembles t-libres de sommes et les majorants de $S_t(k)$ pour redémontrer simultanément quelques majorants de $S(k)$ et $WS(k)$.

Voici le contenu du second chapitre. Dans la section 1, nous décrivons une structure très particulière des parties pour former nos partitions. Dans la section 2, nous donnons quelques formules pour les sommes restreintes de ces parties spéciales. Dans la section 3, nous donnons des restrictions globales sur la forme recherchée des partitions. Ces restrictions sont ensuite assemblées dans la section 4 dans des algorithmes de recherche. Enfin, dans la section 5, nous présentons des partitions obtenues par ces algorithmes et qui établissent les minorants de $WS(k)$ mentionnés ci-dessus pour $k = 7, 8$ et 9 .

Notation 1. *Soit $x, y \in \mathbb{N}$, on écrit $[x, y]$ l'intervalle d'entiers*

$$[x, y] = \{z \in \mathbb{N} \mid x \leq z \leq y\}.$$

Notons que $[x, y] = \emptyset$ si $x > y$. Si $x = 1$ et $y = n \in \mathbb{N}$ on écrit

$$[n] = [1, n] = \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Soient $X \subseteq \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$, nous écrivons $[X]^k = \{Y \subseteq X \mid |Y| = k\}$. Si $X = [n]$, $n \in \mathbb{N}$, on enlève le second crochet, c'est-à-dire

$$[n]^k = [[n]]^k = \{Y \subseteq [n] \mid |Y| = k\}.$$

Chapitre 1

Encadrements des nombres $S(k)$ et $WS(k)$

Le nombre de Schur classique $S(k)$, $k \in \mathbb{N}^*$, est le plus grand entier n tel qu'il existe une partition de $[n]$ en k parties ne contenant pas une solution de (E_1) : $x + y = z$, si de plus on accepte (on ne compte pas) les solutions $x = y$ alors ce plus grand entier n est le nombre de Schur faible $WS(k)$. Le problème général est alors de déterminer ce nombre. Une autre façon de reformuler ce problème de Schur c'est : à partir de quel entier n toute partition de $[n+1]$ en k parties contient une partie contenant au moins une solution de (E_1).

Cela nous rappelle le principe des tiroirs de Dirichlet, qui affirme que si n chaussettes occupent r tiroirs d'une commode, et si $n > r$, alors au moins un tiroir doit contenir strictement plus d'une chaussette. Nous allons étudier d'abord quelques propriétés d'une généralisation de ce principe des tiroirs qui est la théorie de Ramsey. Puis nous étudions les nombres de Schur et quelques autres versions de ces nombres. En donnant des majorants des nombres de Ramsey puis de $S(k), WS(k)$, nous démontrerons leurs existences.

Il y a une correspondance entre commodes, coloriages et partitions. Soient $r, n \in \mathbb{N}^*$. Une commode $\mathcal{C} = \{T_1, \dots, T_r\}$ à r tiroirs où nous rangeons n chaussettes (supposons $X = \{\text{ensemble des } n \text{ chaussettes}\}$, $|X| = n$), correspond à la partition $\mathcal{P} = \{A_1, \dots, A_r\}$ de X en r parties tel que $A_i = T_i$ pour $1 \le i \le r$. Pareillement, nous pouvons supposer que les chaussettes dans un tiroir sont de même couleur (ou étiquette) et de couleur différente de celles des autres tiroirs, alors nous définissons χ un r-coloriage de X, qui est une application de X dans $[r]$, par

$$\begin{aligned} \chi : X &\longrightarrow [r] \\ x &\longmapsto \chi(x) = i \quad \text{si} \quad x \in A_i = T_i. \end{aligned}$$

1 Nombres de Ramsey

Nous définissons d'abord une notation :

Définition 2. *Soient $n, r \in \mathbb{N}^*$, et r entiers naturels $l_1, l_2, \dots, l_r$. On écrit*

$$n \to (l_1, l_2, \dots, l_r),$$

si pour tout r-coloriage de $[n]^2$, il existe un entier i, $1 \leq i \leq r$, et un sous-ensemble d'entiers naturels $T \subseteq [n]$, $|T| = l_i$ tel que $[T]^2$ est coloré en i.

Si $l_1 = l_2 = \cdots = l_r = l$, nous écrivons

$$n \to (l : r).$$

Rappelons que $[n]^2 = [[n]]^2 = \{\{x, y\} \subseteq [n] \mid x \neq y\}$. Plus généralement nous avons la définition suivante pour $k \in \mathbb{N}$:

$$n \to (l_1, l_2, \ldots, l_r)^k$$

si pour tout r-coloriage de $[n]^k$, il existe un entier i, $1 \leq i \leq r$, et un sous-ensemble d'entiers naturels $T \subseteq [n]$, $|T| = l_i$ tel que $[T]^k$ est coloré en i. Puisque nous n'étudions que la dimension $k = 2$, nous avons choisi la notation de la Définition 2 au lieu de

$$n \to (l_1, \ldots, l_r)^2.$$

Nous remarquons dans cette définition aussi qu'on peut changer l'ensemble $[n]$ par un autre de même cardinal.

Par exemple

$$6 \to (3, 3).$$

En effet, soit $\chi : [6]^2 \to [2]$, pour $x, y \in [6]$, $x \neq y$ nous avons

$$\chi(\{x, y\}) = \chi(x, y) \in [2].$$

Nous définissons

$$\begin{aligned} T_1 &= \{x \in [5] \mid \chi(6, x) = 1\}, \\ T_2 &= \{x \in [5] \mid \chi(6, x) = 2\}. \end{aligned}$$

Alors $T_1 \cup T_2 = [5]$ et donc il existe $j \in [2]$ tel que $|T_j| \geq 3$.

— S'il existe $a_1, a_2 \in T_j$ tel que $\chi(a_1, a_2) = j$ alors nous avons trouvé

$$T = \{6, a_1, a_2\}$$

tel que $\chi([T]^2) = j$.

— Sinon il existe au moins $a_1, a_2, a_3 \in T_j$ tel que

$$\chi(a_1, a_2) = \chi(a_1, a_3) = \chi(a_2, a_3) = 3 - j \neq j$$

et nous avons aussi trouvé $T = \{a_1, a_2, a_3\}$ de couleur $3 - j \in [2]$.

Ceci peut se traduire par cet exemple : si 6 personnes sont inscrites sur le réseau social facebook, 3 parmi elles sont amies entre elles ou 3 parmi elles ne sont pas amies entre elles. Nous définissons la couleur de deux personnes par 1 si elles sont amies et 2 sinon.

Propriétés 1. *Nous avons les triviales propriétés suivantes :*

1. *Si $l_i \leq l'_i$, $1 \leq i \leq r$ et $n \to (l_1, \ldots, l_r)$, alors*

$$n \to (l'_1, \ldots, l'_r).$$

2. *Si $n \leq m$ et $n \to (l_1, \dots, l_r)$ alors*
$$m \to (l_1, \dots, l_r).$$

3. *Si σ est une permutation de $[r]$, alors*
$$n \to (l_1, \dots, l_r) \Leftrightarrow n \to (l_{\sigma(1)}, \dots, l_{\sigma(r)}).$$

4. *Nous avons*
$$n \to (l_1, \dots, l_r) \Leftrightarrow n \to (l_1, \dots, l_r, 2).$$
En particulier, $l_1 \to (l_1, 2)$.

Démonstration. Soient $r, n, m \in \mathbb{N}^*$ et $l_1, \dots, l_r, l'_1, \dots, l'_r \in \mathbb{N}$ avec $n \leq m$ et $l_i \leq l'_i$ pour $1 \leq i \leq r$.

1 Soit χ un r-coloriage de $[n]$. Par hypothèse, il existe $i \in [r]$ et $T \subseteq [n]$ tel que $|T| = l_i$ et $[T]^2$ est de couleur i. Nous choisissons un sous-ensemble $T' \subseteq T$ tel que $|T'| = l'_i$, alors $[T']^2$ est de couleur i, c'est-à-dire,
$$n \to (l'_1, \dots, l'_r).$$

2 Soit χ un r-coloriage de $[m]$, alors sa restriction $\chi_{|_{[n]}}$ sur $[n]$ est un r-coloriage de $[n]$. Par hypothèse, il existe $i \in [r]$ et $T \subseteq [n] \subseteq [m]$ tel que $|T| = l_i$ et $\chi([T]^2) = \chi_{|_{[n]}}([T]^2) = i$. D'où
$$m \to (l_1, \dots, l_r).$$

3 Soit σ une permutation de $[r]$. Supposons que
$$n \to (l_1, \dots, l_r),$$
c'est-à-dire, par définition
$$\forall \chi : [n]^2 \to [r], \exists i \in [r], T \subseteq [n] \mid |T| = l_i, \chi([T]^2) = i.$$
Ce qui est équivalent à
$$\forall \chi : [n]^2 \to [r], \exists j \in [r], \sigma(j) = i \in [r], T \subseteq [n] \mid |T| = l_{\sigma(j)}, \chi([T]^2) = \sigma(j).$$
En d'autres termes,
$$n \to (l_{\sigma(1)}, \dots, l_{\sigma(r)}).$$

4 ($\Rightarrow$) Soit $\chi : [n]^2 \to [r+1]$.
- Si $\chi^{-1}(r+1) = \emptyset$, alors χ est un r-coloriage de $[n]^2$. Par hypothèse, il existe $i \in [r]$ et $T \subseteq [n]$, tel que $|T| = l_i$ et $\chi([T]^2) = i$.
- Si $\chi^{-1}(r+1) \neq \emptyset$, alors il existe $x, y \in [n], x \neq y$ tel que
$$\chi(\{x, y\}) = \chi(x, y) = r + 1.$$
Il suffit de prendre $T = \{x, y\} \subseteq [n]$. Donc nous avons $|T| = 2$ et $\chi([T]^2) = r + 1$.

D'où,

$$n \to (l_1, \ldots, l_r, 2).$$

($\Leftarrow$) Soit $\chi : [n]^2 \to [r]$. Nous pouvons considérer χ comme un $r+1$-coloriage avec $\chi^{-1}(r+1) = \emptyset$. Par hypothèse, il existe $i \in [r]$ et $T \subseteq [n]$, tel que $|T| = l_i$ et $\chi([T]^2) = i$. D'où

$$n \to (l_1, \ldots, l_r).$$

En particulier, nous avons $l_1 \to (l_1)$ (car il n'y a qu'un 1-coloriage de $[l_1]$ et nous prenons $T = [l_1]$ qui est de couleur 1), c'est-à-dire, $l_1 \to (l_1, 2)$.

□

Théorème 3. (Ramsey) *Soient $r \in \mathbb{N}^*$ et $l_1, \ldots, l_r \in \mathbb{N}$, alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que*

$$n \to (l_1, \ldots, l_r).$$

Définition 4. *Soient $r \in \mathbb{N}^*$ et $l_1, \ldots, l_r \in \mathbb{N}$. Le* Nombre de Ramsey $R(l_1, \ldots, l_r)$ *est le plus petit entier naturel n tel que*

$$n \to (l_1, \ldots, l_r).$$

En d'autres termes, $R(l_1, \ldots, l_r)$ est le plus petit entier n tel que pour tout r-coloriage de $[n]^2$, il existe i, $1 \leq i \leq r$, et un ensemble d'entiers $T \subseteq [n]$, $|T| = l_i$ tel que $[T]^2$ est coloré en i.

Si $l_1 = l_2 = \cdots = l_r = l$ nous notons

$$R(l; r) = R(l_1, \ldots, l_r) = R(\underbrace{l, \ldots, l}_{r}).$$

D'après la Propriété 1, $R(l_1, \ldots, l_r)$ est croissante sur chaque variable l_i, $1 \leq i \leq r$ et aussi symétrique, c'est-à-dire $R(l_1, \ldots, l_r) = R(l_{\sigma(1)}, \ldots, l_{\sigma(r)})$, pour toute permutation σ de $[r]$.

Nous remarquons que le principe des tiroirs de Dirichlet est une version à une dimension de cette définition, c'est-à-dire, si $n > r$, alors

$$n \to (\underbrace{2, \ldots, 2}_{r})^1.$$

En particulier, le plus petit entier qui vérifie cette relation est $r+1$, c'est-à-dire, $r+1 \to (\underbrace{2, \ldots, 2}_{r})^1$, car r tiroirs ne peuvent contenir strictement plus de r chaussettes avec une seule chaussette par tiroir ; ajouter une autre chaussette nous obligera à réutiliser l'un des tiroirs.

Démonstration du Théorème 3. Soient $r \in \mathbb{N}$ et $l_1, \ldots, l_r \in \mathbb{N}$. Nous utilisons la récurrence sur les l_i, $1 \leq i \leq r$. D'après la Propriété 1, nous avons pour tout $i \in [r]$,

$$R(l_i, 2, \ldots, 2) = R(2, \ldots, l_i, \ldots, 2) = l_i.$$

Nous supposons que pour $i = 1, \ldots, r$, le nombre de Ramsey $R(l_1, \ldots, l_i - 1, \ldots, l_r)$ existe. Puis nous allons montrer que

$$n = 2 + \sum_{i=1}^{r} (R(l_1, \ldots, l_i - 1, \ldots, l_r) - 1)$$

vérifie le théorème, c'est-à-dire : pour tout r-coloriage de $[n]^2$, nous cherchons $i \in [r]$ et $T \subseteq [n]$, tel que $|T| = l_i$ et $\chi(T) = i$.

Soit χ un r-coloriage de $[n]^2$.

$$\begin{aligned} \chi : \quad [n]^2 &\longrightarrow \quad [r] \\ \{x, y\} &\longmapsto \quad \chi(\{x, y\}) = \chi(x, y). \end{aligned}$$

Nous choisissons un élément arbitraire $x \in [n]$. Puis nous définissons pour chaque $i = 1, \ldots, r$, l'ensemble

$$X_i = \{y \in [n] \setminus \{x\} \mid \chi(x, y) = i\}.$$

Nous avons $\bigcup_{i=1}^{r} X_i = [n] \setminus \{x\}$, c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{r} |X_i| &= n - 1 \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{r} (R(l_1, \ldots, l_i - 1, \ldots, l_r) - 1). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Si pour tout $i = 1, \ldots, r$, nous avons $|X_i| \leq R(l_1, \ldots, l_i - 1, \ldots, l_r) - 1$ alors

$$\sum_{i=1}^{r} |X_i| \leq \sum_{i=1}^{r} (R(l_1, \ldots, l_i - 1, \ldots, l_r) - 1),$$

qui est en contradiction avec (1.1). Donc il existe i, $1 \leq i \leq r$, tel que

$$|X_i| \geq R(l_1, \ldots, l_i - 1, \ldots, l_r).$$

- S'il existe $j \in [r] \setminus \{i\}$ et un ensemble d'entiers $T \subseteq X_i \subseteq [n]$ tel que $|T| = l_j$ et $\chi([T]^2) = j$ alors nous avons le théorème.
- Sinon, par définition, il existe un ensemble d'entiers $T \subseteq X_i$ tel que $|T| = l_i - 1$ et $\chi([T]^2) = i$. Par construction, pour tout $y \in T \subseteq X_i$ nous avons $\chi(x, y) = i$. En prenant
$$T^* = T \cup \{x\} \subseteq [n]$$
nous avons $|T^*| = l_i$ et $\chi([T^*]^2) = i$.

En résumé, il existe $k \in [r]$ et $T \subseteq [n]$ tel que $|T| = l_k$ et $[T]^2$ est coloré en k. □

Nous allons voir le cas $l_1 = l_2 = \cdots = l_r = l$.

Proposition 5. *Soient $r, l \in \mathbb{N}$, avec $r, l \geq 1$. Nous avons*

$$r^{(l-1) \cdot r + 1} \rightarrow (l : r).$$

Démonstration. Nous allons construire une suite d'ensembles $(S_i)_{1\leq i\leq (l-1)r+1}$ et une suite d'entiers $(x_i)_{1\leq i\leq (l-1)r+1}$ avec $x_i \in S_i$ pour $i = 1, \ldots, r$. Soit S_1 un ensemble d'entiers naturels avec

$$|S_1| \geq r^{(l-1)r+1}.$$

Remarquons que nous pouvons choisir $S_1 = [r^{(l-1)r+1}]$.

Soit $\chi : [S_1]^2 \to [r]$, un r-coloriage de $[S_1]^2$. Rappelons que nous allons montrer qu'il existe un sous-ensemble $T \subseteq S_1$ tel que $|T| = l$ et $[T]^2$ monochromatique.

Pour chaque $1 \leq i \leq (l-1)r+1$ nous définissons S_i et $x_i \in S_i$ comme suit :

1. Ayant choisi S_i, nous choisissons $x_i \in S_i$ arbitrairement.
2. Ayant choisi $x_i \in S_i$, nous définissons
$$T^i_j = \{y \in S_i \setminus \{x_i\} \mid \chi(x_i, u) = j\}, \text{ pour } j = 1, \ldots, r.$$
Nous avons, $\cup_{j=1}^r T^i_j = S_i \setminus \{x_i\}$, d'où, $\sum_{j=1}^r |T^i_j| = |S_i| - 1$.
3. Nous choisissons $S_{i+1} = T^i_k$, $k \in [r]$ si $|T^i_k| \geq |T^i_j|$, pour tout $j \in [r]$. Alors nous avons
$$\begin{aligned} \chi(x_i, S_{i+1}) &= k \\ S_{i+1} &\subseteq S_i \\ |S_{i+1}| &\geq \frac{|S_i| - 1}{r}. \end{aligned}$$

Comme $|S_1|$ est assez grand nous pouvons choisir $x_1, x_2, \ldots, x_{(l-1)r+1}$ avant que le processus s'arrête (c'est-à-dire, $S_i = \emptyset$). Nous définissons un nouveau r-coloriage χ^* de $\{x_1, \ldots, x_{(l-1)r+1}\}$ par

$$\begin{aligned} \chi^* : \quad \{x_1, \ldots, x_{(l-1)r+1}\} &\longrightarrow \quad [r] \\ x_i &\longmapsto \quad \chi^*(x_i) = \chi(x_i, S_{i+1}). \end{aligned}$$

Nous avons

$$\{x_1, \ldots, x_{(l-1)r+1}\} = \cup_{j=1}^r \chi^{*-1}(j), \tag{1.2}$$

comme les $\chi^{-1}(j)$ sont deux à deux disjoints, par le principe des tiroirs, il existe $j \in [r]$ tel que $|\chi^{*-1}(j)| \geq l$ (sinon $\forall j \in [r], |\chi^{*-1}(j)| \leq l-1$ alors

$$\sum_{j=1}^r |\chi^{*-1}(j)| \leq r(l-1)$$

qui est en contradiction avec (1.2)).

Ainsi, nous pouvons trouver

$$\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_l}\} \subseteq \chi^{*-1}(j),$$

avec $1 \leq i_1 < \cdots < i_l \leq (l-1)r+1$, tel que

$$\chi^*(x_{i_s}) \ = \ j = \ \chi(x_{i_s}, S_{i_s+1}), \text{ pour } 1 \leq s \leq l.$$

Par construction, pour chaque $1 \leq s < t \leq l$, nous avons

$$x_{i_t} \ \in \ S_{i_t} \ \subseteq \ S_{i_t+1} \ \subseteq \ S_{i_s+1}$$

et donc

$$\chi(x_{i_s}, x_{i_t}) \ = \ \chi(x_{i_s}, S_{i_t+1}) \ = \ \chi(x_{i_s}, S_{i_s+1}) \ = \ j.$$

Alors, nous obtenons $T = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_l}\} \subseteq S_1$ tel que $\chi([T]^2) = j$. □

2 Nombres de Schur

Définition 6. *Un* ensemble libre de somme *est un ensemble d'entiers naturels qui ne contient pas 3 éléments x_1, x_2, x_3 tel que $x_1 + x_2 = x_3$.*

En d'autres termes, un ensemble A est libre de somme s'il ne contient pas une solution de l'équation

$$(E_1) : x + y = z. \tag{2.1}$$

Soient deux ensembles $A, B \subseteq \mathbb{N}$. Rappelons que la *somme* $A + B$ est définie par

$$A + B = \{a + b \mid (a, b) \in A \times B\}.$$

et leur différence

$$A - B = \{a - b \mid (a, b) \in A \times B\}.$$

Notons que si $A = \{x\}$ est un singleton, nous écrivons $x + B$ (*resp.* $x - B$) à la place de $\{x\} + B$ (*resp.* $\{x\} - B$).

Par définition, un ensemble S est *libre de somme* si

$$(S + S) \cap S = \emptyset.$$

Ceci est équivalent à $(S - S) \cap S = \emptyset$.

Exemples 7. *$S_1 = \{1, 3, 5\}$ est libre de somme, mais $S_2 = \{1, 3, 6\}$ n'est pas libre de somme, car 3 et $3 + 3 = 6$ sont contenus dans S_2.*

Définition 8. *Soit r un entier positif. Le* nombre de Schur *$S(r)$ est le plus grand entier m tel qu'il existe une partition (*resp. *coloriage) de $[m]$ en r parties (*resp. *ensembles monochromatiques) libres de sommes.*

Une telle partition est aussi appelée *r-partition libre de somme*. Nous montrerons l'existence de ces nombres de Schur $S(r)$ dans la section 5. Parfois, nous disons aussi que $S(r)$ est le *nombre de Schur classique* de r. Nous avons alors

$$S(r) = \max\{m \in \mathbb{N} \mid \exists A_1, \ldots, A_r \text{ libres de sommes tels que } [m] = A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_r\}.$$

Nous pouvons le définir aussi comme suit :

$$S(r) = \min\{m \in \mathbb{N} \mid \forall \chi : [m+1] \to [r], \quad \exists i \in [r] \mid \chi^{-1}(i) \cap (\chi^{-1}(i) + \chi^{-1}(i)) \neq \emptyset\}.$$

Les valeurs connues sont

$$S(1) = 1,$$

car $\{1, 2\}$ n'est pas libre de somme et

$$S(2) = 2$$

car la seule partition de $[1, 4]$ en deux parties libres de sommes est

$$[1, 4] = \{1, 4\} \sqcup \{2, 3\}.$$

Pour $r = 3$,

$$S(3) = 13,$$

par exemple voici une partition de $[1, 13]$ en trois parties A_1, A_2, A_3 libres de sommes qui montre que $S(3) \geq 13$ avec

$$\begin{aligned} A_1 &= \{1, 4, 10, 13\} \\ A_2 &= \{2, 3, 11, 12\} \\ A_3 &= \{5, 6, 7, 8, 9\}. \end{aligned}$$

En 1965, L.D. Baumert [9] a montré par ordinateur que

$$S(4) = 44.$$

Voici un exemple de partition de $[44]$ en quatre parties A_1, A_2, A_3, A_4 libres de sommes qui montre que $S(4) \geq 44$:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{1, 4, 9, 12, 19, 26, 33, 36, 39, 41, 44\} \\ A_2 &= \{2, 3, 10, 11, 15, 16, 29, 34, 35, 42, 43\} \\ A_3 &= \{5, 6, 7, 8, 17, 18, 27, 28, 37, 38, 40\} \\ A_4 &= \{13, 15, 20, 21, 22, 23, 24, 30, 31, 32\}. \end{aligned}$$

En 1916, I.Schur a introduit dans [18] cette notion pour montrer l'existence de solutions non triviales de l'équation diophantienne modulo p

$$x^m + y^m \equiv z^m \pmod{p},$$

pour tout nombre premier p assez grand par rapport à m. Il a donné des minorants de $S(r)$, $r \in \mathbb{N}^*$ mais aussi des majorants qui montrent l'existence des nombres de Schur.

Théorème 9 (I.Schur, 1916)**.** *Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Nous avons*

$$\frac{3^r - 1}{2} \leq S(r) \leq \lfloor r! \cdot e \rfloor - 1.$$

Ici $\lfloor x \rfloor$ est la partie entière inférieure de x, $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$. Pour avoir ce minorant, Schur a montré l'inégalité du Lemme suivante :

Lemme 10. *Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Nous avons*

$$S(r + 1) \geq 3 \cdot S(r) + 1.$$

Démonstration. Pour montrer ce lemme il suffit de construire une $r + 1$-partition libre de somme de $[3 \cdot S(r) + 1]$. Soient $A_1, \ldots, A_r \subseteq \mathbb{N}^*$ tels que pour chaque $i = 1, \ldots, r$, A_i est libre de somme et

$$[S(r)] = A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_r.$$

Nous notons $n = 3S(r) + 2$.

Nous considérons $r + 1$ ensembles $B_1, \ldots, B_r, B_{r+1} \subseteq \mathbb{N}^*$ définis par

$$\begin{aligned} B_{r+1} &= [S(r) + 1, 2S(r) + 1], \\ B_i &= A_i \cup (n - A_i), \qquad \text{pour } i = 1, \ldots, r. \end{aligned}$$

Nous avons pour $1 \leq i \leq r$

$$\begin{aligned} B_i + B_i &= (A_i \cup (n - A_i)) + (A_i \cup (n - A_i)) \\ &= (A_i + A_i) \cup (n + (A_i - A_i)) \cup (2n - (A_i + A_i)). \end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned} n + (A_i - A_i) &\subseteq [2S(r) + 3, 4S(r) + 1] \quad (2.2) \\ 2n - (A_i + A_i) &\subseteq [4S(r) + 4, 6S(r) + 2] \quad (2.3) \\ (A_i + A_i) &\subseteq [2, 2S(r)]. \quad (2.4) \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} (B_i + B_i) \cap A_i &= ((A_i + A_i) \cap A_i) \cup ((n + (A_i - A_i)) \cap A_i) \cup ((2n - (A_i + A_i)) \cap A_i) \\ &= \emptyset, \end{aligned}$$

car

$$A_i \subseteq [1, S(r)]$$

est libre de somme et nous le comparons avec (2.2) et (2.3). Nous avons aussi

$$\begin{aligned} (B_i + B_i) \cap (n - A_i) &= ((A_i + A_i) \cap (n - A_i)) \cup ((n + (A_i - A_i)) \cap (n - A_i)) \\ &\quad \cup ((2n - (A_i + A_i)) \cap (n - A_i)) \\ &= ((A_i + A_i) \cap (n - A_i)) \cup (n + ((A_i - A_i) \cap -A_i)) \\ &\quad \cup ((2n - (A_i + A_i)) \cap (n - A_i)) \\ &= \emptyset, \end{aligned}$$

car

$$(n - A_i) \subseteq [2S(r) + 2, 3S(r) + 1]$$

et nous le comparons avec (2.3) et (2.4), et comme A_i libre de somme alors

$$(A_i - A_i) \cap -A_i = \emptyset.$$

En résumé, B_i est libre de somme pour $1 \leq i \leq r$. Nous avons aussi

$$B_{r+1} = [S(r) + 1, 2S(r) + 1]$$

est libre de somme. Par construction, les B_i sont deux à deux disjoints. Comme

$$\bigcup_{i=1}^{r} A_i = [S(r)]$$

nous avons

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=1}^{r+1} B_i &= \bigcup_{i=1}^{r} (A_i \cup (n - A_i)) \quad \cup \quad [S(r) + 1, 2S(r) + 1], \\ &= \bigcup_{i=1}^{r} A_i \quad \cup \quad (n - \bigcup_{i=1}^{r} A_i) \quad \cup \quad [S(r) + 1, 2S(r) + 1], \\ &= [1, S(r)] \quad \cup [2S(r) + 2, 3S(r) + 1] \quad \cup \quad [S(r) + 1, 2S(r) + 1], \\ &= [3S(r) + 1]. \end{aligned}$$

□

Corollaire 11. *Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Nous avons*

$$S(r) \geq \frac{3^r - 1}{2}. \tag{2.5}$$

Démonstration. Ce corollaire découle du lemme précédent. Pour $r = 1$, nous avons

$$S(1) = 1 = \frac{3^1 - 1}{2}.$$

Supposons que (2.5) soit vraie pour $r \geq 1$, montrons que c'est encore le cas pour $r + 1$. D'après le Lemme 10,

$$S(r+1) \geq 3S(r) + 1 \geq 3 \cdot (\frac{3^r - 1}{2}) + 1 = \frac{3^{r+1} - 3 + 2}{2} = \frac{3^{r+1} - 1}{2}.$$

□

En 1972, Abbott et Hanson [1] ont donné une généralisation du Lemme 10.

Théorème 12 (Abbott et Hanson, 1972)**.** *Soient $r, u \in \mathbb{N}^*$. Nous avons*

$$S(r+u) \geq 2 \cdot S(r) \cdot S(u) + S(r) + S(u).$$

Démonstration. Il suffit de construire une partition en $r+u$ parties libres de sommes de $[2 \cdot S(r) \cdot S(u) + S(r) + S(u)]$. Nous notons

$$\begin{aligned} n &= 2 \cdot S(r) + 1, \\ m &= 2 \cdot S(r) \cdot S(u) + S(r) + S(u). \end{aligned}$$

Soient $A_1, \ldots, A_r, B_1, \ldots, B_u \subseteq \mathbb{N}^*$, des ensembles libres de sommes tel que

$$\begin{aligned} [S(r)] &= A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_r, \\ [S(u)] &= B_1 \sqcup \cdots \sqcup B_u. \end{aligned}$$

Nous considérons les $r + u$ ensembles $D_i \subseteq \mathbb{N}^*$, $1 \leq i \leq r + u$ définis par

$$\begin{cases} D_i = n \cdot [0, S(u)] + A_i & \text{si } 1 \leq i \leq r, \\ D_{r+j} = n \cdot B_j - [0, S(r)] & \text{si } 1 \leq j \leq u, (i = r + j). \end{cases}$$

Avec $l.A = \{l.a \mid a \in A\}$ si $l \in \mathbb{N}$ et $A \subseteq \mathbb{N}$.

Nous allons montrer que les $(D_i)_{1 \leq i \leq r+u}$ forment une partition de $[m]$ en $r + u$ parties libres de sommes.

- Nous montrons d'abord que les D_i sont libres de sommes pour $1 \leq i \leq r + u$.
  - Soit $1 \leq i \leq r$, supposons que D_i n'est pas libre de somme, c'est-à-dire, il existe $x_1, x_2, x_3 \in D_i$, tels que $x_1 + x_2 = x_3$. il existe $a_1, a_2, a_3 \in A_i$ et $b_1, b_2, b_3 \in [0, S(u)]$ tels que

$$x_k = n \cdot b_k + a_k, \quad k = 1, 2, 3.$$

Par hypothèse, nous avons $n \cdot (b_1 + b_2) + (a_1 + a_2) = n \cdot b_3 + a_3$, c'est-à-dire,

$$n \cdot (b_1 + b_2 - b_3) = a_3 - (a_1 + a_2). \tag{2.6}$$

Or pour $k = 1, 2, 3$, $a_k \in A_i$, ce qui implique, $1 \leq a_k \leq S(r)$, donc

$$-2.S(r) + 1 \leq a_3 - (a_1 + a_2) \leq S(r) - 2. \tag{2.7}$$

Comme $n = 2S(r)+1$, les deux membres de l'égalité (2.6) sont nuls. Alors nous avons

$$a_1 + a_2 = a_3,$$

qui est en contradiction avec A_i libre de somme. D'où D_i est libre de somme pour $1 \leq i \leq r$.

- Soit $1 \leq j \leq u$, supposons que D_{r+j} ne soit pas libre de somme, c'est-à-dire, il existe $x_1, x_2, x_3 \in D_{r+j}$, tels que $x_1 + x_2 = x_3$. Alors il existe $a_1, a_2, a_3 \in [0, S(r)]$ et $b_1, b_2, b_3 \in B_j$ tels que

$$x_k = n \cdot b_k - a_k, \quad k = 1, 2, 3.$$

Par hypothèse, nous avons $n \cdot (b_1 + b_2) - (a_1 + a_2) = n \cdot b_3 - a_3$, c'est-à-dire,

$$n \cdot (b_1 + b_2 - b_3) = a_1 + a_2 - a_3. \tag{2.8}$$

Or pour $k = 1, 2, 3$, $0 \leq a_k \leq S(r)$, donc

$$-S(r) \leq a_1 + a_2 - a_3 \leq 2S(r). \tag{2.9}$$

Comme $n = 2S(r)+1$, les deux membres de l'égalité (2.8) sont nuls. Nous avons alors

$$b_1 + b_2 = b_3,$$

qui est en contradiction avec B_j libre de somme. D'où D_{r+j} est libre de somme pour $1 \leq j \leq u$.

Donc, pour $1 \leq i \leq r + u$, D_i est libre de somme.

- Soient $1 \leq i < j \leq r + u$. Nous allons montrer que $D_i \cap D_j = \emptyset$.
  - Si $j \leq r$, alors

$$D_i = n \cdot [0, S(u)] + A_i \quad \text{et} \quad D_j = n \cdot [0, S(u)] + A_j.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} D_i \cap D_j &= (n \cdot [0, S(u)] + A_i) \cap (n \cdot [0, S(u)] + A_j) \\ &= (n \cdot [0, S(u)]) + (A_i \cap A_j) \\ &= \emptyset, \end{aligned}$$

car A_i, A_j sont disjoints.

  - Si $1 \leq i \leq r < j \leq r + u$, alors

$$D_i = n \cdot [0, S(u)] + A_i \quad \text{et} \quad D_j = n \cdot B_{j-r} - [0, S(r)].$$

Supposons que $D_i \cap D_j \neq \emptyset$ et soit

$$x \in D_i \cap D_j = (n \cdot [0, S(u)] + A_i) \cap (n \cdot B_{j-r} - [0, S(r)]),$$

alors il existe $a_i \in A_i, b_i \in [0, S(u)]$ et $a_j \in [0, S(r)], b_j \in B_{j-r}$ tels que

$$x = n \cdot b_i + a_i,$$

et

$$x = n \cdot b_j - a_j.$$

Nous avons

$$n \cdot (b_j - b_i) = a_j + a_i. \tag{2.10}$$

Comme $1 \leq a_j + a_i \leq 2S(r)$, et $n = 2S(r) + 1$, les deux membres de l'égalité (2.10) sont nuls, ce qui n'est pas possible car $a_i + a_j \geq 1$. D'où

$$D_i \cap D_j = \emptyset.$$

- Si $r < i < j \leq r + u$, alors

$$D_i = n \cdot B_{i-r} - [0, S(r)] \quad \text{et} \quad D_j = n \cdot B_{j-r} - [0, S(r)].$$

Nous avons

$$\begin{array}{rcl} D_i \cap D_j & = & (n \cdot B_{i-r} \ - \ [0, S(r)]) \ \cap \ (n \cdot B_{j-r} \ - \ [0, S(r)]) \\ & = & n \cdot (B_{i-r} \cap B_{j-r}) \ - \ [0, S(r)] \\ & = & \emptyset, \end{array}$$

car B_{i-r} et B_{j-r} sont disjoints.

D'où les $D_i, 1 \leq i \leq r + u$ sont deux à deux disjoints.

- Maintenant, nous montrons que

$$\bigcup_{i=1}^{r+u} D_i = [1, m]$$

avec $m = 2S(r)S(u) + S(r) + S(u)$. Nous avons

$$\left\{ \begin{array}{rclcll} D_i & = & n \cdot [0, S(u)] + A_i & \subseteq & [1, m], & \text{si } 1 \leq i \leq r, \\ D_{r+j} & = & n \cdot B_j - [0, S(r)] & \subseteq & [1, m], & \text{si } 1 \leq j \leq u, (i = r + j). \end{array} \right.$$

Alors

$$\bigcup_{i=1}^{r+u} D_i \subseteq [1, m].$$

Comme les D_i sont deux à deux disjoints,

$$\begin{aligned}
\left|\bigcup_{i=1}^{r+u} D_i\right| &= \sum_{i=1}^{r+u} |D_i| \\
&= \sum_{i=1}^{r} |D_i| + \sum_{j=1}^{u} |D_{r+j}| \\
&= \sum_{i=1}^{r} |n \cdot [0, S(u)] + A_i| + \sum_{j=1}^{u} |n \cdot B_j - [0, S(r)]| \\
&= \sum_{i=1}^{r} (1 + S(u)) \cdot |A_i| + \sum_{j=1}^{u} (1 + S(r)) \cdot |B_j| \\
&= (1 + S(u)) \cdot \sum_{i=1}^{r} |A_i| + (1 + S(r)) \cdot \sum_{j=1}^{u} |B_j| \\
&= (1 + S(u)) \cdot S(r) + (1 + S(r)) \cdot S(u) \\
&= m.
\end{aligned}$$

D'où $\bigcup_{i=1}^{r+u} D_i = [1, m]$.

□

Remarquons que si $u = 1$, puisque $S(1) = 1$, nous avons le Lemme 10 :

$$S(r + 1) \geq 3 \cdot S(r) + 1.$$

Utilisant le Théorème 12, Abbott et Hanson ont donné des minorants de $S(r)$ dans le cas général qui améliorent et généralisent ceux donnés par Schur.

Corollaire 13. *Soit $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 4$. Nous avons*

$$S(r) \geq \frac{44}{89} \cdot 89^{\frac{r}{4}}. \tag{2.11}$$

Notons que $89^{\frac{1}{4}} \simeq 3,07147 > 3$.

Démonstration. Pour $r = 4$, l'inégalité 2.11 est vraie, de même pour

$$\begin{aligned}
&r = 5, \;\; S(5) \geq 160 \geq \frac{44}{89} \cdot 89^{\frac{5}{4}} \simeq 135,14, \\
&r = 6, \;\; S(6) \geq 3 \cdot 160 + 1 = 481 \geq \frac{44}{89} \cdot 89^{\frac{6}{4}} \simeq 415,09 \\
&r = 7, \;\; S(7) \geq 3 \cdot 481 + 1 = 1444 \geq \frac{44}{89} \cdot 89^{\frac{7}{4}} \simeq 1274,95
\end{aligned}$$

Supposons que l'inégalité (2.11) soit vraie pour $r - 1 \geq 7$, montrons que c'est aussi le cas pour r. En appliquant le Théorème 12, avec $u = 4$ et $S(4) = 44$, nous avons

$$\begin{aligned}
S(r) &\geq 2 \cdot 44 \cdot S(r-4) + S(r-4) + 44 = 89 \cdot S(r-4) + 44, \\
&\geq 89 \cdot S(r-4) \geq 89 \cdot \frac{44}{89} \cdot 89^{\frac{r-4}{4}}, \text{ car } r - 4 \geq 4 \text{ (hypothèse de récurrence)}, \\
&\geq \frac{44}{89} \cdot 89^{\frac{r-4}{4}+1} = \frac{44}{89} \cdot 89^{\frac{r}{4}}.
\end{aligned}$$

D'où pour tout $r \geq 4$, nous avons

$$S(r) \geq \frac{44}{89} \cdot 89^{\frac{r}{4}}.$$

$\square$

En utilisant les minorants connus de $S(k)$, nous pouvons encore améliorer ce résultat.

Corollaire 14. *Soit $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 6$ alors*

$$S(r) \geq C \cdot 1073^{\frac{r}{6}} \textit{ avec } C = \frac{15142}{1073^{\frac{9}{6}}} \simeq 0,4308.$$

Nous remarquons que $1073^{\frac{1}{6}} \simeq 3,1996 > 89^{\frac{1}{4}} \simeq 3,0715 > 3$.

Démonstration. Par récurrence sur r. Pour $r = 6$, nous avons dans [8]

$$S(6) \geq 536 > C \cdot 1073 \simeq 462,25.$$

Pour $r = 7$, d'après Fredricksen et Sweet [8], nous avons

$$S(7) \geq 1680 \geq C \cdot 1073^{\frac{7}{6}} \simeq 1479,05.$$

Pour $r = 8$, nous avons d'après le Lemme 10

$$S(8) \geq 3 \cdot (1680) + 1 = 5041 \geq C \cdot 1073^{\frac{8}{6}} \simeq 4732,42.$$

Pour $r = 9$, par le Lemme de Schur 10

$$S(9) \geq 3 \cdot (5041) + 1 = 15124 = C \cdot 1073^{\frac{9}{6}}.$$

Pour $r = 10$, le meilleur minorant connu de $S(10)$ est obtenu en utilisant le Théorème 12 d'Abbott et Hanson avec

$$S(10) \geq 2 \cdot S(5) \cdot S(5) + S(5) + S(5).$$

Nous avons

$$S(10) \geq 2 \cdot 160 \cdot 160 + 160 + 160 = 51520 \geq C \cdot 1073^{\frac{10}{6}} \simeq 48448,81.$$

Et enfin pour $r = 11$, nous avons par le Théorème 12,

$$S(11) \geq 2 \cdot S(5) \cdot S(6) + S(5) + S(6),$$

alors

$$S(11) \geq 2 \cdot 160 \cdot 536 + 160 + 536 = 172216 \geq C \cdot 1073^{\frac{11}{6}} \simeq 155018,36.$$

Supposons que le Corollaire soit vrai pour $r - 1 \geq 11$; montrons que c'est encore le cas pour r. D'après le Théorème 12 nous avons

$$\begin{aligned} S(r) &\geq (2 \cdot S(6) + 1) \cdot S(r-6) + S(6) \\ &\geq (2 \cdot 536 + 1) S(r-6) = 1073 \cdot S(r-6) \\ &\geq 1073 \cdot C \cdot 1073^{\frac{r-6}{6}}. \end{aligned}$$

Car, par hypothèse de récurrence, $r - 1 \geq 11$, c'est-à-dire, $r - 6 \geq 6$. D'où

$$S(r) \geq C \cdot 1073^{\frac{r}{6}} \text{ pour tout } r \geq 6.$$

$\square$

Nous montrerons les majorants de $S(k)$ donnés par le Théorème 9 dans la section 5 de ce chapitre, où nous étudions aussi une relation entre les nombres de Schur et les nombres de Ramsey dans le Théorème cité dans [15] suivant. Voir aussi [10].

Théorème 15. *Soit k un entier positif. Nous avons*

$$S(k) \leq R(3;k) - 2.$$

Nous allons voir une version faible des nombres de Schur.

3 Nombres de Schur faibles

Définition 16. *Un* ensemble faiblement libre de somme *est un ensemble d'entiers naturels qui ne contient pas 3 éléments différents x_1, x_2, x_3 tels que $x_1 + x_2 = x_3$.*

En d'autres termes, un ensemble A est faiblement libre de somme s'il ne contient pas une solution de l'équation

$$(E_2) : x + y = z \quad | \, x \neq y. \tag{3.1}$$

Soient deux ensembles $A, B \subseteq \mathbb{N}$. Rappelons que la *somme restreinte* $A \dot{+} B$ est définie par

$$A \dot{+} B = \{a + b \mid (a, b) \in A \times B, \quad a \neq b\}.$$

Comme dans le cas classique, si $A = \{x\}$ un singleton, nous écrivons $x \dot{+} B$ à la place de $\{x\} \dot{+} B$.

En utilisant la somme restreinte, un ensemble S est *faiblement libre de somme* si

$$(S \dot{+} S) \cap S = \emptyset.$$

Exemples 17. $S_1 = \{1, 2, 4, 7\}$ *est faiblement libre de somme, mais* $S_2 = \{1, 2, 4, 6\}$ *n'est pas faiblement libre de somme, car* 2 *et* 4 *sont dans* S_2 *ainsi que leur somme* 6.

Propriété 1. *Un ensemble libre de somme est faiblement libre de somme.*

Démonstration. Par définition, un ensemble S libre de somme ne contient pas de solutions à l'équation $x + y = z$, alors S ne contient pas aussi 3 éléments différents x_1, x_2, x_3 tels que $x_1 + x_2 = x_3$. $\square$

Définition 18. *Soit r un entier positif. Le* nombre de Schur faible $WS(r)$ *(`Weak Schur number`) est le plus grand entier m tel qu'il existe une partition de $[m]$ en r parties faiblement libres de sommes.*

Une telle partition est aussi appelée *r-partition faiblement libre de somme*. Nous montrerons l'existence de ces nombres de Schur faibles dans la section 5 de ce chapitre. Nous avons alors

$$WS(r) = \max\{m \in \mathbb{N} \mid \exists A_1, \ldots, A_r \text{ faiblement libres de sommes } \mid [m] = A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_r\}.$$

Ce qui est équivalent à

$$WS(r) = \min\{m \in \mathbb{N} \mid \forall \chi : [m+1] \to [r], \ \ \exists i \in [r] \mid \chi^{-1}(i) \cap (\chi^{-1}(i) \dot{+} \chi^{-1}(i)) \neq \emptyset\}.$$

Les valeurs connues sur $WS(r)$ sont

$$WS(1) = 2, \quad WS(2) = 8, \quad WS(3) = 23, \quad WS(4) = 66.$$

Pour $r = 1$, comme $[1, 3]$ n'est pas faiblement libre de somme alors $\mathcal{P} = \{[2]\}$ la seule 1-partition faible de $[2]$, d'où

$$WS(1) = 2.$$

Pour $r = 2$, voici une partition de $[8]$ en deux parties A_1, A_2 faiblement libres de sommes qui montre que

$$WS(2) \geq 8. \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \{1, 2, 4, 8\} \\ A_2 &= \{3, 5, 6, 7\}. \end{aligned}$$

Rado a donné une démonstration sur $WS(2) < 9$ dans [14] que nous présentons maintenant. Supposons qu'il existe une partition de $[9]$ en deux parties A, B faiblement libres de sommes. Posons

$$A_1 = A \cap [5, 9] \text{ et } B_1 = B \cap [5, 9],$$

alors A_1, B_1 est une partition en deux parties de $\{5, 6, 7, 8, 9\}$. Donc une des deux parties contient plus de trois éléments. Supposons que

$$A_1 \supseteq \{a, b, c\},$$

avec $5 \leq a < b < c \leq 9$, d'où

$$b - a, c - a \in B,$$

sinon $b - a = a$ ou $c - a = a$, c'est-à-dire, $b = 2a > 9$ ou $c = 2a > 9$ ce qui sont impossibles. Alors

$$(c - a) - (b - a) = c - b \in A$$

avec $b \neq c - b$ sinon $c = 2b \geq 10$, alors A n'est pas faiblement libre de somme. Donc

$$WS(2) < 9.$$

Ainsi, avec l'inégalité (3.2) nous avons

$$WS(2) = 8.$$

Pour $r = 3$, nous completons la 2-partition ci-dessus et nous obtenons une 3-partition de $[1, 23]$ en trois parties B_1, B_2, B_3 faiblement libres de sommes avec

$$\begin{aligned} B_1 &= \{1, 2, 4, 8, 11, 22\} \\ B_2 &= \{3, 5, 6, 7, 19, 21, 23\} \\ B_3 &= \{9, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 20\}, \end{aligned}$$

ce qui montre, par exemple, l'inégalité $WS(3) \geq 23$. Pour $r = 4$, nous étudierons un exemple de 4-partition faiblement libre de somme de $[1, 66]$ dans le chapitre 2.

D'après la Propriété 1, nous avons pour tout $r \in \mathbb{N}^*$

$$S(r) \leq WS(r).$$

En 2002, Bornsztein [4] a donné un majorant de $WS(r)$, qui montre son existence, pour tout entier positif r.

Théorème 19 (P.Bornsztein, 2002). *Soit $r \in \mathbb{N}$. Nous avons*

$$WS(r) \leq \lfloor r! \cdot r \cdot e \rfloor.$$

Comme sur $S(r)$, nous avons une relation entre nombres de Schur faibles et nombres de Ramsey dans le théorème donné dans [19] suivant :

Théorème 20. *Soit $r \in \mathbb{N}$. Nous avons*

$$WS(r) \leq R(4; r) - 2.$$

Nous donnerons les démonstrations des Théorèmes 19 et 20 dans la section 5 de ce chapitre.

En 1952, Walker a donné dans [12] des résultats sur les nombres de Schur faibles, il a utilisé la définition

$$N_k = WS(k) + 1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Il a affirmé que

$$N_4 = WS(4) + 1 = 67, \quad N_5 = WS(5) + 1 = 197,$$

sans donner de preuve même pas de partitions pour montrer les inégalités. Il a aussi donné deux inégalités sur les nombres de Schur faibles :

$$2(WS(k) + 1) < WS(k+1) + 1. \tag{3.3}$$

et

$$WS(k+1) + 1 < 3 \cdot (WS(k) + 1), \tag{3.4}$$

Mais, l'inégalité (3.4) est fausse pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, sinon nous aurions

$$WS(k) \leq C_1 \cdot 3^k$$

pour une constante $C_1 \in \mathbb{R}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, qui contredit le Corollaire 13 d'Abbott et Hanson, qui montre pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ que

$$WS(k) \geq S(k) \geq \frac{44}{89} 89^{\frac{k}{4}} > C_2 \cdot 3^k,$$

avec $C_2 \in \mathbb{R}$ une constante. Ici nous allons montrer une amélioration de l'inégalité (3.3). Néanmoins, asymptotiquement, la relation d'Abbott et Hanson donne des meilleurs résultats.

4 Comparaison entre $WS(k+1)$ et $WS(k)$

Dans cette petite section, nous établissons un majorant de $WS(k+1)$ en fonction de $WS(k)$. Bien que cet encadrement ne soit pas particulièrement puissant, son intérêt principal réside dans la simplicité de la construction ci-dessous.

Proposition 21. *Pour tout entier $r \geq 1$, nous avons*

$$WS(r+1) \geq \frac{5}{2} WS(r) + 2. \tag{4.1}$$

Démonstration. Posons $n = WS(r)$ et soient r ensembles $A_1, \dots, A_r$ faiblement libres de sommes tels que

$$[n] = A_1 \sqcup \dots \sqcup A_r.$$

Posons $l = 3n+3$ et $k = \frac{5}{2}n + 2$. Nous allons construire $r+1$ sous-ensembles faiblement libres de sommes de $[k]$ qui le couvriront.

Posons, pour $1 \leq i \leq r$

$$C_i = A_i \cup (l - A_i).$$

Alors C_i n'est pas nécessairement faiblement libre de somme, puisque nous pouvons avoir

$$x, 2x \in A_i \subseteq C_i$$

pour quelques x, ce qui implique

$$l - 2x, l - x \in C_i$$

avec

$$l - x = (l - 2x) + x \quad \text{et} \quad x \neq l - 2x.$$

Maintenant, si nous enlevons tous les éléments de C_i de la forme $l - x$ tel que $x, 2x \in A_i$, alors

$$C_i \setminus \{l - x \mid x, 2x \in A_i\}$$

est faiblement libre de somme, pour tout $1 \leq i \leq n$. Posons

$$d_i = \max\{x \in [n] \mid x, 2x \in A_i\}.$$

Alors $C_i \cap [l - d_i - 1]$ est faiblement libre de somme car

$$(C_i \cap [l - d_i - 1]) \subseteq C_i \setminus \{l - x \mid x, 2x \in A_i\}.$$

Pour tout i, nous avons $d_i, 2d_i \in A_i \subseteq [1, n]$ donc $2d_i \leq n$, c'est-à-dire, $d_i \leq \frac{1}{2}n$. Ainsi, nous avons

$$l - d_i - 1 \geq l - \frac{1}{2}n - 1 = 3n + 3 - \frac{1}{2}n - 1 = \frac{5}{2}n + 2 = k.$$

Puisque

$$(C_i \cap [k]) \subseteq (C_i \cap [l - d_i - 1])$$

pour $1 \leq i \leq r$, il en résulte que $C_i \cap [k]$ est faiblement libre de somme pour $i = 1, \dots, r$. Maintenant, nous avons

$$\begin{aligned}
\bigcup_{i=1}^{r} C_i &= \bigcup_{i=1}^{r} (A_i \cup (l - A_i)) \\
&= \bigcup_{i=1}^{r} A_i \quad \cup \quad \bigcup_{i=1}^{r} (l - A_i) \\
&= [1, n] \cup (l - [1, n]) \\
&= [n] \cup [2n + 3, 3n + 2].
\end{aligned}$$

Ainsi, en prenant $B_i = C_i \cap [k]$ pour $1 \leq i \leq r$, nous avons

$$\begin{aligned}
\bigcup_{i=1}^{r} B_i &= \bigcup_{i=1}^{r} (C_i \cap [k]) \\
&= (\bigcup_{i=1}^{r} C_i) \cap [k] \\
&= ([n] \cup [2n+3, 3n+2]) \cap [k] \\
&= [n] \cup [2n+3, k],
\end{aligned}$$

car $2n+3 < k = 2n+2+\frac{1}{2}n < 3n+2$. L'ensemble

$$B_{r+1} = [n+1, 2n+2]$$

est aussi faiblement libre de somme. Comme

$$\begin{aligned}
B_1 \cup \cdots \cup B_r \cup B_{r+1} &= ([1,n] \cup [2n+3,k]) \cup [n+1, 2n+2] \\
&= [k],
\end{aligned}$$

nous obtenons $r+1$ parties, $B_1, \ldots, B_{r+1}$, faiblement libres de sommes, deux à deux disjointes et qui couvrent $[k]$. □

5 Les ensembles t-libres de sommes

Dans cette section, nous introduisons un ensemble particulier, qui nous aidera à unifier les démonstrations des majorants de $S(k)$ et $WS(k)$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Définition 22. *Soit $t \in \mathbb{N}$. Un* ensemble t-libre de somme A *est un ensemble d'entiers naturels tel que pour chaque $a \in A$ nous avons :*

$$|(A+a) \cap A| \leq t. \tag{5.1}$$

Nous remarquons que la condition en (5.1) est équivalente à

$$|(A-a) \cap A| \leq t, \tag{5.2}$$

car

$$(A-a) \cap A = ((A+a) \cap A) - a.$$

Cette définition peut se traduire par : A est t-libre de somme s'il contient au plus t solutions de l'équation

$$(E_a) : x + a = y$$

pour tout $a \in A$.

Exemple 23. $S = \{1,3,4,5,7\}$ *est* 2*-libre de somme mais* S *n'est pas* 1*-libre de somme car*

$$\begin{aligned}
&(S-1) \cap S = \{3,4\}, \quad (S-3) \cap S = \{1,4\}, \\
&(S-4) \cap S = \{1,3\}, \quad (S-5) \cap S = (S-7) \cap S = \emptyset.
\end{aligned}$$

Propriété 2. *Soit $t \in \mathbb{N}$. Tout ensemble t-libre de somme est $t+1$-libre de somme.*

La réciproque est fausse, voir Exemple 23.

Démonstration. Soit $t \in \mathbb{N}$. Soit $A \subseteq \mathbb{N}$ un ensemble t-libre de somme. Soit $a \in A$, d'après la définition,

$$|(A-a) \cap A| \leq t \leq t+1.$$

Alors pour tout $a \in A$, nous avons $|(A-a) \cap A| \leq t+1$, c'est-à-dire, A est $t+1$-libre de somme. □

Nous allons donner une propriété des ensembles t-libres de sommes que nous utiliserons souvent dans cette thèse.

Propriété 3. *Soit $t \in \mathbb{N}$. Un ensemble d'entiers naturels A, $|A| \geq t$, est t-*libre de somme *si pour tout $a \in A$ il existe t entiers $b_1^a, \ldots, b_t^a \in A$ tels que*

$$(A-a) \cap A \subseteq \{b_1^a, \ldots, b_t^a\}.$$

Démonstration. Soit $a \in A$, comme A est un ensemble t-libre de somme, nous avons

$$|(A-a) \cap A| \leq t.$$

Listons les éléments de

$$(A-a) \cap A = \{b_1^a, \ldots, b_{l(a)}^a\}$$

où $l(a) \leq t$. Nous pouvons choisir $t - l(a)$ entiers

$$b_{l(a)+1}^a, \ldots, b_t^a \in A \setminus \{b_1^a, \ldots, b_{l(a)}^a\},$$

car $|A| \geq t$. Alors nous avons :

$$(A-a) \cap A \subseteq \{b_1^a, \ldots, b_t^a\}.$$

□

Définition 24. *Soit k un entier positif. Le nombre $S_t(k)$ est le plus grand entier n tel qu'il existe un k-coloriage de $[n]$ tel que chaque ensemble monochromatique est t-libre de somme.*

$$\begin{aligned} S_t(k) &= \max\{n \in \mathbb{N} \mid \exists A_1, \ldots, A_k \textit{ t-libres de sommes} \mid [n] = A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_k\} \\ &= \max\{n \in \mathbb{N} \mid \exists \chi : [n] \to [k] \mid \forall i \in [k],\ \forall a \in \chi^{-1}(i),\quad |\chi^{-1}(i) \cap (a + \chi^{-1}(i))| \leq t\}. \end{aligned}$$

En d'autres termes, $S_t(k)$ est le plus petit entier naturel n tel que pour tout k-coloriage de $[n+1]$ il existe un ensemble monochromatique qui n'est pas t-libre de somme. Nous remarquons qu'un ensemble A n'est pas t-libre de somme s'il existe $a \in A$ tel que $|(A-a) \cap A| > t$.

Nous montrerons l'existence de ces nombres $S_t(k)$ dans les Propositions 29 et 31.

Affirmation 25. *Soit un ensemble non vide $A \subseteq \mathbb{N}$. L'ensemble A est libre de somme si et seulement si A est 0-libre de somme.*

Démonstration. Par définition, l'ensemble d'entiers A est 0-libre de somme si et seulement si pour tout $a \in A$,

$$|(A - a) \cap A| = 0.$$

En d'autres termes, $(A - a) \cap A = \emptyset$ pour tout $a \in A$. Ceci signifie que

$$(A - A) \cap A = \bigcup_{a \in A} (A - a) \cap A = \emptyset,$$

c'est-à-dire, A est libre de somme. □

Cette Affirmation 25 entraîne ce qui suit :

Affirmation 26. *Soit $k \in \mathbb{N}^*$, nous avons*

$$S(k) = S_0(k). \tag{5.3}$$

Nous avons aussi une relation sur les ensembles faiblement libres de sommes et les ensembles 1-libres de sommes.

Affirmation 27. *Soit un ensemble non vide $A \subseteq \mathbb{N}$. Si l'ensemble A est faiblement libre de somme alors A est 1-libre de somme.*

Démonstration. Par définition, l'ensemble A est faiblement libre de somme si pour tout $a \in A$ et $b \in A \setminus \{a\}$, nous avons $a + b \notin A$, c'est-à-dire, $b \notin A - a$, alors

$$(A - a) \cap (A \setminus \{a\}) = \emptyset.$$

En d'autres termes, $(A - a) \cap A \subseteq \{a\}$, ce qui implique

$$|(A - a) \cap A| \leq 1.$$

Donc A est 1-libre de somme. □

D'où l'Affirmation suivante :

Affirmation 28. *Soit $k \in \mathbb{N}^*$, nous avons*

$$WS(k) \leq S_1(k). \tag{5.4}$$

Nous avons introduit cette notion pour démontrer les majorants de $S(k)$ et $WS(k)$ donnés précédemment, car les $S_t(k)$ sont aussi des majorants de $S(k)$ et $WS(k)$ pour $t = 0$ et 1 respectivement.

Dans cette section, nous allons donner deux majorants de $S_t(k)$ pour $t \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

5.1 Majorants de $S_t(k)$

Dans cette sous-section, nous majorons $S_t(k)$ ce qui montre directement son existence.

Proposition 29. *Soient k, t deux entiers naturels tels que $k \geq 1$. Nous avons*

$$S_t(k) \leq k! \sum_{i=0}^{k-1} \frac{t(k-i)+1}{i!} = k! \sum_{r=1}^{k} \frac{rt+1}{(k-r)!}.$$

Démonstration. Soit n un entier naturel tel que il existe une partition de $[n]$ en k parties t-libres de sommes $A_1, \ldots, A_k$. Nous avons

$$[n] = A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_k.$$

Puisque A_i est t-libre de somme, pour $1 \leq i \leq k$, alors pour tout $a \in A_i$,

$$|(A_i - a) \cap A| \leq t.$$

Pour chaque sous-ensemble $E \subseteq [n]$ nous définissons

$$D(E) = (E - \min E) \setminus \{0\}.$$

Nous allons construire deux suites de sous-ensembles $(E_r)_{0 \leq r \leq k}$ et $(F_r)_{0 \leq r \leq k}$. Nous obtenons une suite d'entiers $(n_r)_{0 \leq r \leq k}$ définie pour $0 \leq r \leq k$ par

$$n_r = |E_r|.$$

Nous posons

— $F_0 = [n]$,

— $E_0 = \emptyset$,

— $n_0 = 0$.

Supposons que $|A_1| \geq |A_i|$ pour $1 \leq i \leq k$, c'est-à-dire, $|A_1| = \max\{|A_i| \mid 1 \leq i \leq k\}$ et nous définissons

— $E_1 = A_1$,

— $a_1 = \min E_1$,

— $n_1 = |E_1|$.

Comme $F_0 = [n] = A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_k$ nous avons

$$n = |F_0| \leq k \cdot n_1. \tag{5.5}$$

Par construction, nous avons $D(E_1) = (E_1 - a_1) \setminus \{0\}$. Puisque $A_1 = E_1$ est un ensemble t-libre de somme, par la Propriété 3, il existe $b_1^{a_1}, \ldots, b_t^{a_1} \in A_1$ tels que

$$(A_1 - a_1) \cap A_1 \subseteq \{b_1^{a_1}, \ldots, b_t^{a_1}\}.$$

Nous définissons

— $F_1 = D(E_1) \setminus \{b_1^{a_1}, \ldots, b_t^{a_1}\} = (E_1 - a_1) \setminus \{0, b_1^{a_1}, \ldots, b_t^{a_1}\}$.

Affirmation 1. $F_1 \cap A_1 = \emptyset$.

Démonstration de l'Affirmation 1 Nous avons $D(E_1) \subseteq (E_1 - a_1) = (A_1 - a_1)$ alors

$$D(E_1) \cap A_1 \subseteq (A_1 - a_1) \cap A_1 \subseteq \{b_1^{a_1}, \dots, b_t^{a_1}\}.$$

Ainsi

$$F_1 \cap A_1 = (D(E_1) \cap A_1) \setminus \{b_1^{a_1}, \dots, b_t^{a_1}\} = \emptyset.$$

D'où, $F_1 \cap A_1 = \emptyset$.
Fin de démonstration de l'Affirmation 1

Comme $F_1 = (E_1 - a_1) \setminus \{0, b_1^{a_1}, \dots, b_t^{a_1}\}$ nous avons

$$|F_1| \geq |E_1 - a_1| - (t+1) = n_1 - (t+1), \tag{5.6}$$

et aussi $F_1 \subseteq \bigcup_{i=2}^{k} A_i$, car $F_1 \cap A_1 = \emptyset$. Alors

$$F_1 = \bigcup_{i=2}^{k} (F_1 \cap A_i).$$

Nous supposons que $|F_1 \cap A_2| \geq |F_1 \cap A_i|$ pour tout $1 \leq i \leq k$. Puis nous définissons

— $E_2 = F_1 \cap A_2$,

— $a_2 = \min E_2$,

— $n_2 = |E_2|$.

Alors nous avons

$$|F_1| \leq (k-1) \cdot |F_1 \cap A_2| = (k-1) \cdot |E_2| = (k-1) \cdot n_2. \tag{5.7}$$

Puisque $a_2 \in E_2 \subseteq F_1 \subseteq A_1 - a_1$, alors $a_2 \in A_1 - a_1$, c'est-à-dire, $a_1 + a_2 \in A_1$. Comme A_1 est t-libre de somme, alors il existe $b_1^{a_1+a_2}, \dots, b_t^{a_1+a_2} \in A_1$ tels que

$$(A_1 - (a_1 + a_2)) \cap A_1 \subseteq \{b_1^{a_1+a_2}, \dots, b_t^{a_1+a_2}\}.$$

Nous avons aussi, $a_2 \in E_2 \subseteq A_2$, alors il existe $b_1^{a_2}, \dots, b_t^{a_2} \in A_2$ tels que

$$(E_2 - a_2) \cap A_2 \subseteq (A_2 - a_2) \cap A_2 \subseteq \{b_1^{a_2}, \dots, b_t^{a_2}\}.$$

Nous définissons

— $F_2 = D(E_2) \setminus \{b_1^{a_2}, \dots, b_t^{a_2}, b_1^{a_1+a_2}, \dots, b_t^{a_1+a_2}\}$

Affirmation 2. $F_2 \cap (A_1 \cup A_2) = \emptyset$.

Démonstration de l'Affirmation 2. Nous avons $D(E_2) \subseteq (E_2 - a_2) \subseteq (A_2 - a_2)$ car $E_2 \subseteq A_2$. Ainsi

$$D(E_2) \cap A_2 \subseteq (A_2 - a_2) \cap A_2 \subseteq \{b_1^{a_2}, \dots, b_t^{a_2}\}. \tag{5.8}$$

Comme $E_2 \subseteq F_1 \subseteq (A_1 - a_1)$ alors $D(E_2) \subseteq (E_2 - a_2) \subseteq (A_1 - (a_1 + a_2))$ donc nous avons

$$D(E_2) \cap A_1 \subseteq (E_2 - a_2) \cap A_1 \subseteq (A_1 - (a_1 + a_2)) \cap A_1 \subseteq \{b_1^{a_1+a_2}, \ldots, b_t^{a_1+a_2}\}. \quad (5.9)$$

En combinant (5.8) et (5.9) nous avons

$$D(E_2) \cap (A_1 \cup A_2) \subseteq \{b_1^{a_2}, \ldots, b_t^{a_2}, b_1^{a_1+a_2}, \ldots, b_t^{a_1+a_2}\},$$

ainsi,

$$F_2 \cap (A_1 \cup A_2) = (D(E_2) \cap (A_1 \cup A_2)) \setminus \{b_1^{a_2}, \ldots, b_t^{a_2}, b_1^{a_1+a_2}, \ldots, b_t^{a_1+a_2}\} = \emptyset.$$

Fin de démonstration de l'Affirmation 2.

D'après la définition de F_2, nous avons

$$|F_2| \geq |D(E_2)| - 2t = n_2 - 1 - 2t = n_2 - (2t + 1). \quad (5.10)$$

Soit $3 \leq r \leq k$, et nous supposons que nous avons défini $E_0, E_1, \ldots, E_{r-1}$ et $F_0, F_1, \ldots, F_{r-1}$. Pour $1 \leq i \leq r - 1$ nous avons :

— $E_i = F_{i-1} \cap A_i$, où

$$|F_{i-1} \cap A_i| = \max\{|F_{i-1} \cap A_j| \mid 1 \leq j \leq k\}$$

— $a_i = \min E_i$.

— $n_i = |E_i|$.

— $F_i = D(E_i) \setminus \{b_1^{a_j+\cdots+a_{i-1}+a_i}, \ldots, b_t^{a_j+\cdots+a_{i-1}+a_i} \mid 1 \leq j \leq i\}$, avec

$$F_i \cap (A_1 \cup \ldots \cup A_i) = \emptyset,$$

et

$$n_i - (it + 1) \leq |F_i| \leq (k - i) \cdot n_{i+1}.$$

Alors nous avons

$$F_{r-1} \subseteq (A_r \cup \cdots \cup A_k)$$

car $F_{r-1} \cap (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{r-1}) = \emptyset$. Nous supposons que

$$|F_{r-1} \cap A_r| = \max\{|F_{r-1} \cap A_j| \mid 1 \leq j \leq k\},$$

et nous définissons

— $E_r = F_{r-1} \cap A_r$,

— $a_r = \min E_r$,

— $n_r = |E_r|$.

D'où
$$|F_{r-1}| \leq (k-r+1)\cdot n_r, \tag{5.11}$$
car $F_{r-1} = (A_r \cap F_{r-1}) \cup \cdots \cup (A_k \cap F_{r-1})$.

Affirmation 3. *Soit* $2 \leq i \leq r$.
$$d \in E_i \Longrightarrow \begin{cases} (E_i - d) \subseteq (E_{i-1} - (a_{j-1} + d)), \\ d + a_{i-1} \in E_{i-1}. \end{cases}$$

Démonstration de l'Affirmation 3. Soient $i \in [2, r]$ et
$$d \in E_i \subseteq F_{i-1} \subseteq E_{i-1} - a_{i-1}$$
alors
$$E_i - d \subseteq E_{i-1} - a_{i-1} - d = E_{i-1} - (a_{i-1} + d).$$
et $d + a_{i-1} \in E_{i-1}$ car $d \in E_i \subseteq E_{i-1} - a_{i-1}$.
Fin de démonstration de l'Affirmation 3.

Alors, nous définissons

— $F_r = D(E_r) \setminus \{b_1^{a_j+\cdots+a_{r-1}+a_r}, \ldots, b_t^{a_j+\cdots+a_{r-1}+a_r} \mid 1 \leq j \leq r\}$.

Donc nous obtenons :
$$|F_r| \geq |D(E_r)| - rt = n_r - (rt+1). \tag{5.12}$$

Affirmation 4. $F_r \cap (A_1 \cup \cdots \cup A_r) = \emptyset$.

Démonstration de l'Affirmation 4. Par définition,
$$D(E_r) = (E_r - a_r) \setminus \{0\}.$$
Soit $1 \leq j \leq r$, par l'Affirmation 3, nous avons
$$D(E_r) \ \subseteq \ E_r - a_r \ \subseteq \ E_{r-1} - (a_{r-1} + a_r) \ \subseteq \cdots \subseteq \ E_j - (a_j + \cdots + a_{r-1} + a_r)$$
avec $a_j + \cdots + a_{r-1} + a_r \in E_j$. Par construction $E_j \subseteq A_j$, alors nous avons
$$D(E_r) \ \subseteq \ (A_j - (a_j + \cdots + a_{r-1} + a_r)),$$
et d'après la Propriété 3, il existe $b_1^{a_j+\cdots+a_{r-1}+a_r}, \ldots, b_t^{a_j+\cdots+a_{r-1}+a_r} \in A_j$ tels que
$$\begin{aligned} \big(D(E_r) \cap A_j\big) \quad &\subseteq \quad A_j \cap \big(A_j - (a_j + \cdots + a_{r-1} + a_r)\big) \\ &\subseteq \quad \{b_1^{a_j+\cdots+a_{r-1}+a_r}, \ldots, b_t^{a_j+\cdots+a_{r-1}+a_r}\}. \end{aligned}$$
D'autre part, $F_r \subseteq (D(E_r) \setminus \{b_1^{a_j+\cdots+a_{r-1}+a_r}, \ldots, b_t^{a_j+\cdots+a_{r-1}+a_r}\})$ pour tour $1 \leq j \leq r$. Ainsi,
$$F_r \cap A_j \subseteq \Big(D(E_r) \setminus \{b_1^{a_j+\cdots+a_{r-1}+a_r}, \ldots, b_t^{a_j+\cdots+a_{r-1}+a_r}\}\Big) \cap A_j = \emptyset.$$
Alors, $F_r \cap A_j = \emptyset$ pour tout $1 \leq j \leq r$. D'où, $F_r \cap (A_1 \cup \ldots \cup A_r) = \emptyset$.
Fin de démonstration de l'Affirmation 4.

- Si $r = k$, nous avons $F_k \cap (A_1 \cup \cdots \cup A_k) = \emptyset$, avec
$F_k \;=\; D(E_k) \setminus \{b_1^{a_j+\cdots+a_{k-1}+a_k}, \ldots, b_t^{a_j+\cdots+a_{k-1}+a_k} \mid 1 \leq j \leq k\} \;\subseteq\; [n].$

Donc, $F_k = \emptyset$ (car $A_1 \cup \cdots \cup A_k = [n]$). Ainsi,

$$0 = |F_k| = |D(E_k) \setminus \{b_1^{a_j+\cdots+a_{k-1}+a_k}, \ldots, b_t^{a_j+\cdots+a_{k-1}+a_k} \mid 1 \leq j \leq k\}|$$

alors

$$\begin{aligned} 0 \geq\; & |D(E_k)| - |\{b_1^{a_j+\cdots+a_{k-1}+a_k}, \ldots, b_t^{a_j+\cdots+a_{k-1}+a_k} \mid 1 \leq j \leq k\}| \\ \geq\; & (n_k - 1) - (k \cdot t), \end{aligned}$$

car $|D(E_k)| = n_k - 1$. D'où,

$$n_k - 1 \leq k \cdot t. \tag{5.13}$$

- Si $r + 1 \leq k$, par l'Affirmation 4, $F_r \subseteq (A_{r+1} \cup \ldots \cup A_k)$ alors nous avons

$$F_r = \bigcup_{j=r+1}^{k} (F_r \cap A_j).$$

Nous supposons que $|F_r \cap A_{r+1}| \geq |F_r \cap A_i|$ pour tout $1 \leq i \leq k$. Nous définissons

— $E_{r+1} = F_r \cap A_{r+1}$,

— $n_{r+1} = |E_{r+1}|$.

D'où

$$|F_r| \leq (k - r) \cdot |F_r \cap A_{r+1}| = (k - r) \cdot n_{r+1}. \tag{5.14}$$

En résumé, nous avons, pour tout $1 \leq r < k$

$$|D(E_r)| - rt = n_r - (rt + 1) \leq |F_r| \leq (k - r) \cdot n_{r+1}. \tag{5.15}$$

Alors $n_r - (rt + 1) \leq (k - r) \cdot n_{r+1}$, c'est-à-dire, pour tout $1 \leq r < k$

$$n_r \leq (k - r) \cdot n_{r+1} + (rt + 1).$$

Pour $1 \leq r < k$, nous divisons chaque membre par $(k - r)!$ et nous obtenons

$$\frac{n_r}{(k-r)!} \;\leq\; \frac{(k-r) \cdot n_{r+1} + (rt+1)}{(k-r)!} \;=\; \frac{n_{r+1}}{(k-(r+1))!} + \frac{rt+1}{(k-r)!}.$$

En sommant membre à membre pour tout $1 \leq r < k$ nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{k-1} \frac{n_r}{(k-r)!} \;&\leq\; \sum_{r=1}^{k-1} \left(\frac{n_{r+1}}{(k-(r+1))!} + \frac{rt+1}{(k-r)!} \right) \\ &\leq\; \sum_{r=2}^{k} \frac{n_r}{(k-r)!} + \sum_{r=1}^{k-1} \frac{rt+1}{(k-r)!}. \end{aligned}$$

Donc nous avons

$$\frac{n_1}{(k-1)!} \;\leq\; n_k + \sum_{r=1}^{k-1} \frac{rt+1}{(k-r)!}.$$

Par l'inégalité (5.5) : $|F_0| = n \leq k \cdot n_1$, alors

$$\frac{n}{k!} \;\leq\; \frac{k \cdot n_1}{k!} \;=\; \frac{n_1}{(k-1)!} \;\leq\; n_k + \sum_{r=1}^{k-1} \frac{rt+1}{(k-r)!}. \tag{5.16}$$

Ainsi, par l'inégalité (5.13) : $n_k \leq kt+1$, avec (5.16) nous obtenons

$$\frac{n}{k!} \;\leq\; kt+1+\sum_{r=1}^{k-1}\frac{rt+1}{(k-r)!},$$

c'est-à-dire,

$$\frac{n}{k!} \;\leq\; \sum_{r=1}^{k}\frac{rt+1}{(k-r)!}.$$

Donc, si n est un entier naturel tel qu'il existe une partition de $[n]$ en k parties t-libres de sommes alors

$$n \;\leq\; k!\sum_{r=1}^{k}\frac{rt+1}{(k-r)!}.$$

En particulier pour

$$S_t(k) \;=\; \max\{n\in\mathbb{N} \mid \exists A_1,\ldots,A_k :\; t-\text{libres de sommes} \mid [n]=A_1\sqcup\cdots\sqcup A_k\},$$

nous avons

$$S_t(k) \;\leq\; k!\sum_{r=1}^{k}\frac{rt+1}{(k-r)!} \;=\; k!\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(k-i)t+1}{i!}.$$

□

Cette Proposition 29 redémontre les majorants donnés par Schur sur $S(k)$ et par Bornsztein sur $WS(k)$ dans le Corollaire suivant.

Corollaire 30. *Soit k un entier positif. Nous avons*

$$\begin{aligned} S(k) \;&\leq\; k!\sum_{r=0}^{k-1}\frac{1}{r!} &&=\; \lfloor k!\cdot e\rfloor-1.\\ WS(k) \;&\leq\; k!\sum_{i=0}^{k}\frac{k-i+1}{i!} &&=\; \lfloor k!\cdot k\cdot e\rfloor. \end{aligned}$$

Rappelons que $\lfloor x\rfloor\in\mathbb{N}$ est la partie entière inférieure de x, c'est-à-dire,

$$\lfloor x\rfloor \leq x < \lfloor x\rfloor+1.$$

Démonstration. Nous appliquons simplement l'Affirmation 26 et la Proposition 29, ainsi :

$$S(k) \;=\; S_0(k) \;\leq\; k!\sum_{r=1}^{k}\frac{1}{(k-r)!} \;=\; k!\sum_{r=0}^{k-1}\frac{1}{r!},$$

où

$$k!\sum_{r=0}^{k-1}\frac{1}{r!} = k!\cdot e - k!\cdot R_k \text{ avec } R_k=\sum_{r=k}^{\infty}\frac{1}{r!} \text{ et } e=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}.$$

Mais

$$\begin{array}{rcl} R_k & = & \frac{1}{k!}\cdot(1+\frac{1}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}+\cdots), \\ \frac{1}{k!}< R_k & < & \frac{1}{k!}\cdot(1+\frac{1}{k+1}+\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{1}{(k+1)^3}+\cdots), \\ \frac{1}{k!}< R_k & < & \frac{1}{k!}\cdot\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^i} = \frac{1}{k!}\cdot\frac{k+1}{k} = \frac{1}{k!}\cdot(1+\frac{1}{k}), \end{array}$$

d'où

$$1 < k!\cdot R_k < 1+\frac{1}{k}.$$

Alors

$$k!\cdot e-1-\frac{1}{k} < k!\sum_{r=0}^{k-1}\frac{1}{r!} < k!\cdot e-1,$$

donc

$$S(k) \leq \lfloor k!\cdot e\rfloor -1 = k!\sum_{r=0}^{k-1}\frac{1}{r!}.$$

Nous avons aussi par l'Affirmation 28 et la Proposition 29,

$$WS(k) \leq S_1(k) \leq k!\sum_{i=0}^{k-1}\frac{k-i+1}{i!},$$

c'est-à-dire

$$\begin{array}{rcl} k!\cdot\sum_{i=0}^{k-1}\frac{k-i+1}{i!} & = & k!\cdot\left(\sum_{i=0}^{k-1}\frac{k}{i!}-\sum_{i=0}^{k-1}\frac{i}{i!}+\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{i!}\right) \\ & = & k!\cdot\left(\sum_{i=0}^{k-1}\frac{k}{i!}+\frac{1}{(k-1)!}\right) = k!\cdot k\cdot\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{i!}+k \\ & = & k!\cdot k\cdot(e-R_k)+k. \end{array}$$

Puisque $\frac{1}{k!} < R_k < \frac{1}{k!}+\frac{1}{k!\cdot k}$, alors

$$\begin{array}{rcl} k!\cdot k(e-\frac{1}{k!}-\frac{1}{k!\cdot k})+k & < k!\sum_{i=0}^{k-1}\frac{k-i+1}{i!} & < k!\cdot k(e-\frac{1}{k!})+k \\ k!\cdot ke-1 & < k!\sum_{i=0}^{k-1}\frac{k-i+1}{i!} & < k!\cdot ke \end{array}$$

d'où,

$$WS(k) \leq \lfloor k!\cdot ke\rfloor = k!\sum_{i=0}^{k-1}\frac{k-i+1}{i!}.$$

□

En résumé, nous avons montré que $S_t(k)$, $t\in\mathbb{N}$ et $k\in\mathbb{N}^*$, existe ainsi que $S(k)$ et $WS(k)$. Nous allons faire la même chose en utilisant les nombres de Ramsey.

5.2 $S_t(k)$ et les nombres de Ramsey

Dans cette section, nous allons majorer $S_t(k)$ par des nombres de Ramsey. La Proposition suivante généralise

$$\begin{aligned} S(k) &\leq R(3;k)-2, \\ WS(k) &\leq R(4;k)-2. \end{aligned}$$

Rappelons que le nombre de Ramsey $R(t;k)$, $t,k \in \mathbb{N}$, est le plus petit entier n tel que pour tout k-coloriage de $[n]^2$ il existe un sous ensemble $T \subseteq [n]$, tel que $|T| = t$ et $[T]^2$ est monochromatique.

Nous avons aussi défini $S_t(k)$ comme le plus grand entier m tel qu'il existe un k-coloriage de $[m]$ tel que tous les sous-ensembles monochromatiques sont t-libres de sommes. En d'autres termes, c'est le plus petit m tel que pour tout k-coloriage de $[m+1]$ il existe au moins un sous-ensemble monochromatique qui n'est pas t-libre de somme. Rappelons qu'un ensemble A n'est pas t-libre de somme s'il existe $a \in A$ tel que $|(A-a) \cap A| > t$.

Proposition 31. *Soient $t \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^*$, nous avons :*

$$S_t(k) \leq R(t+3;k)-2.$$

Démonstration. Nous allons montrer que $S_t(k) < R(t+3;k)-1$, avec $t,k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$. Il suffit de montrer que pour tout k-coloriage de $[R(t+3;k)-1]$ il existe un sous-ensemble monochromatique non t-libre de somme, c'est-à-dire, nous cherchons un sous-ensemble monochromatique $A \subseteq [R(t+3;k)-1]$ et un élément $a \in A$ tel que $|(A-a) \cap A| \geq t+1$.

Soit χ un k-coloriage de $[R(t+3,k)-1]$.

$$\begin{aligned} \chi : [R(t+3,k)-1] &\longrightarrow [k] \\ x &\longmapsto \chi(x). \end{aligned}$$

Nous définissons χ^* un k-coloriage de

$$[R(t+3;k)]^2 = \{\{x,y\} \subseteq [R(t+3;k)] \mid x \neq y\}$$

par

$$\begin{aligned} \chi^* : [R(t+3;k)]^2 &\longrightarrow [k] \\ \{x,y\} &\longmapsto \chi^*(\{x,y\}) = \chi^*(x,y) = \chi(|x-y|). \end{aligned}$$

Notons que

$$\{x,y\} \in [R(t+3,k)]^2 \Longrightarrow |x-y| \in [R(t+3;k)-1].$$

D'après la définition des nombres de Ramsey, il existe $T \subseteq [R(t+3;k)]$ tel que $|T| = t+3$ et $[T]^2$ est monochromatique. Nous supposons que

$$T = \{b_1 < b_2 < \cdots < b_{t+3}\} \subseteq [R(t+3;k)]$$

et

$$\chi^*([T]^2) = r \in [k].$$

Ainsi, pour $i, j \in [t+3]$, $i < j$, nous avons

$$\chi^*(b_j, b_i) = k = \chi(b_j - b_i).$$

Soit $b \in T$, nous définissons un sous-ensemble $\Delta_b(T)$ de $[R(t+3;k)-1]$ par

$$\Delta_b(T) = \{x - b \mid x \in T,\ x > b\}.$$

D'après la définition de T, pour tout $i \in [t+2]$,

$$\Delta_{b_i}(T) = \{b_j - b_i \mid i < j \leq t+3\}$$

est monochromatique et de couleur r, c'est-à-dire, pour $1 \leq i < t+3$, nous avons

$$\chi(\Delta_{b_i}(T)) = r,$$

et

$$|\Delta_{b_i}(T)| = t + 3 - i.$$

Nous prenons

$$\begin{aligned} A &= \{b_j - b_i \mid 1 \leq i < j \leq t+3\} \subseteq [R(t+3;k)-1], \\ &= \Delta_{b_1}(T) \cup \Delta_{b_2}(T) \cup \ldots \cup \Delta_{b_{t+2}}(T) = \bigcup_{i=1}^{t+2} \Delta_{b_i}(T). \end{aligned}$$

Alors $\chi(A) = r$, c'est-à-dire, A est monochromatique, car

$$\chi(\Delta_{b_i}(T)) = r, \text{ pour } 1 \leq i \leq t+2.$$

Nous posons $a_0 = b_2 - b_1 \in A$. Donc d'une part

$$\begin{aligned} A - a_0 &= A - (b_2 - b_1) \\ &= \left(\bigcup_{i=1}^{t+2} \Delta_{b_i}(T) \right) - (b_2 - b_1) \\ &\supseteq \Delta_{b_1}(T) - (b_2 - b_1). \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \Delta_{b_1}(T) - (b_2 - b_1) &= \{(b_j - b_1) - (b_2 - b_1) \mid 1 < j \leq t+3\} \\ &= \{b_j - b_2 \mid 2 \leq j \leq t+3\} \\ &= \{0\} \cup \{b_j - b_2 \mid 2 < j \leq t+3\} \\ &= \{0\} \cup \Delta_{b_2}(T). \end{aligned}$$

Ainsi, $\Delta_{b_2}(T) \subseteq A - a_0$. Par construction, $\Delta_{b_2}(T) \subseteq A$ alors nous avons

$$\Delta_{b_2}(T) \subseteq (A - a_0) \cap A,$$

avec $|\Delta_{b_2}(T)| = t + 3 - 2 = t + 1$, d'où

$$|(A - a_0) \cap A| \geq t + 1.$$

En résumé, nous avons un ensemble monochromatique $A \subseteq [1, R(t+3;k)-1]$ et un élément $a_0 \in A$ tel que $|(A - a_0) \cap A| \geq t+1$, c'est-à-dire, A est un ensemble monochromatique qui n'est pas t-libre de somme.

$\square$

Nous avons le Corollaire suivant :

Corollaire 32. *Pour $k \in \mathbb{N}^*$, nous avons*

$$\begin{aligned} S(k) &\leq R(3;k) - 2 \\ WS(k) &\leq R(4;k) - 2. \end{aligned}$$

Démonstration. D'après les Affirmations 26 et 28, nous avons pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $S_0(k) = S(k)$ et $WS(k) \leq S_1(k)$. En utilisant la Proposition 31 nous avons

$$\begin{aligned} S(k) &= S_0(k) \leq R(3;k) - 2 \\ WS(k) &\leq S_1(k) \leq R(4;k) - 2. \end{aligned}$$

□

Puisque nous avons montré l'existence des nombres de Ramsey dans la section 1, ce corollaire montre l'existence des nombres de Schur classiques $S(k)$ et faibles $WS(k)$ et la Proposition 31 montre aussi l'existence des nombres $S_t(k)$.

Chapitre 2

Minorants de $WS(k)$ pour $k = 7, 8, 9$

Nous avons vu précédemment des majorants des nombres de Schur. Par exemple, le majorant de $WS(k)$, $k \in \mathbb{N}^*$ donné par Bornsztein est

$$WS(k) \leq \lfloor k! \cdot k \cdot e \rfloor.$$

Pour $k = 4$, nous avons $WS(4) \leq \lfloor 4! \cdot 4 \cdot e \rfloor = 260$. Or nous savons que $WS(4) = 66$, cette valeur est largement plus petite que l'encadrement fourni par cette formule. Donc pour avoir une meilleure estimation d'un de ces nombres, il est préférable de donner des minorants que nous pouvons améliorer jusqu'à obtenir la limite.

Rappelons d'abord qu'un ensemble d'entiers naturels S est *libre de somme* si

$$a, b \in S \Rightarrow a + b \notin S,$$

c'est-à-dire $(S + S) \cap S$ est vide. L'ensemble S est *faiblement libre de somme* si

$$a, b \in S, a \neq b \Rightarrow a + b \notin S,$$

qui est équivalent à $(S \dot{+} S) \cap S$ est vide avec $S \dot{+} S = \{a + b \mid a, b \in S \mid a \neq b\}$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Le nombre de Schur $S(k)$ est défini comme étant le plus grand entier n tel que l'ensemble $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ peut être partitionné en k parties libres de sommes.

De même, le nombre de Schur faible $WS(k)$ est le plus grand entier m tel que $[m]$ peut être partitionné en k parties faiblement libres de sommes.

Un entier n est un minorant de $S(k)$ s'il existe une partition de $[n]$ en k parties libres de sommes. De même, nous avons une inégalité de la forme $m \leq WS(k)$ si nous pouvons construire une partition de $[m]$ en k parties faiblement libres de sommes.

Pour tout $k \geq 1$, nous avons vu que $S(k) \leq WS(k)$, ainsi tout minorant de $S(k)$, en particulier $S(k)$ lui-même, est automatiquement un minorant de $WS(k)$.

Dans cette partie, nous allons surtout chercher des minorants des nombres de Schur faibles $WS(k)$.

Il est connu que

$$WS(1) = 2,\ WS(2) = 8,\ WS(3) = 23,\ WS(4) = 66,$$

la valeur de $WS(4)$ ayant été obtenu par ordinateur dans [3]. Voir aussi [12], [14].

Exemple 33. *Voici une partition* $[1, 66] = A_1 \sqcup A_2 \sqcup A_3 \sqcup A_4$ *de* $[66]$ *en* 4 *parties faiblement libres de sommes* A_i, $i = 1, 2, 3, 4$, *donnant ainsi le minorant* $WS(4) \geq 66$ *:*

$$\begin{aligned} A_1 &= \{1, 2, 4, 8, 11, 22, 25, 50, 63\} \\ A_2 &= \{3\} \cup [5, 7] \cup \{19, 21, 23\} \cup [51, 53] \cup [64, 66] \\ A_3 &= \{9, 10\} \cup [12, 18] \cup \{20\} \cup [54, 62] \\ A_4 &= \{24\} \cup [26, 49]. \end{aligned}$$

Pour $k = 5$, l'égalité $WS(5) = 196$ est affirmée sans preuve dans [12], même pas avec une partition montrant $WS(5) \geq 196$. Ce minorant a été établi plus tard dans [5], en fournissant une partition explicite de [196] en 5 parties faiblement libres de sommes. Il reste un problème ouvert de démontrer que 196 est la valeur exacte de $WS(5)$.

Pour $k = 6$ et 7, les minorants $S(6) \geq 536$ et $S(7) \geq 1680$ ont été établis en 2000 par H. Fredricksen et M. Sweet dans [8], ce qui donne automatiquement les mêmes minorants de $WS(6)$ et $WS(7)$.

Plus tard, des améliorations des minorants de $WS(6)$ ont été obtenues, à savoir $WS(6) \geq 572$ dans [5], et $WS(6) \geq 582$ dans [6], le record actuel.

Pour $k = 7$, le minorant $WS(7) \geq S(7) \geq 1680$ était le meilleur disponible à ce jour. Dans cette thèse, nous améliorons ce minorant en montrant que

$$WS(7) \geq 1740.$$

Enfin, nous fournissons également des bons minorants de $WS(8)$ et $WS(9)$, cas pour lesquelles les seuls minorants disponibles jusqu'à présent étaient ceux donnés par l'inégalité de Schur, à savoir

$$WS(8) \geq S(8) \geq 5041, \quad WS(9) \geq S(9) \geq 15124.$$

Dans cette thèse, nous obtenons

$$WS(8) \geq 5201, \quad WS(9) \geq 15596.$$

Notre but ici est de donner de meilleures minorants des nombres de Schur faibles $WS(k), k \leq 9$. Bien qu'une recherche exhaustive ait été réalisée dans [3] pour $WS(4)$, faire de même pour $k \geq 5$ est actuellement impossible en raison de la taille de l'espace de recherche.

Devant cet obstacle, une approche évidente consiste à restreindre la recherche à seulement une infime proportion de toutes les partitions possibles faiblement libres de sommes d'un intervalle $[1, n] = [n]$. La difficulté, bien sûr, consiste à deviner quelles partitions ont le potentiel de produire de bons encadrements de $WS(k)$.

Telle est précisément notre approche dans cette thèse. Nous allons proposer des partitions faites avec des parties très spéciales exclusivement,qui sont hautement structurées, et qui permettent d'atteindre les meilleurs minorants actuellement connus sur $WS(k)$ pour tout $1 \leq k \leq 9$.

1 Structure des parties

Nous commençons par une description des ingrédients essentiels qui composent les parties de notre partition.

1.1 Intervalles troués spéciaux

Définition 34. *Un* Intervalle troué *est un ensemble d'entiers de la forme*

$$I = [x, y] \setminus C,$$

où $x < y$ sont des entiers positifs et C est un sous-ensemble de $[x+1, y-1]$ avec $|C| \leq 2$. Les éléments de C seront appelés trous *de l'intervalle troué I. Ils sont entièrement déterminés par I, ainsi $x = \min I$, $y = \max I$ et $C = [x, y] \setminus I$.*

Exemples 35. $I = \{1, 2, 4, 7, 8\}$ *n'est pas un intervalle troué car* $I = [1, 8] \setminus \{3, 5, 6\}$ *par contre* $J = \{4, 7, 8\} = [4, 8] \setminus \{5, 6\}$ *est un intervalle troué.*

La motivation pour les *intervalles troués* sera abordée spécialement dans le Remarque 56 de la Section 2 de ce chapitre.

Dans certains cas ci-dessous, il est plus pratique de considérer des sous-ensembles de $\mathbb{N}$ de la forme $[x, y] \setminus C$ sans imposer des restrictions sur C. Bien sûr, tout sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$ peut être représenté sous cette forme.

Notation 36. *Comme d'habitude, le symbole* delta de Kronecker *est défini par*

$$\delta_{x,y} = \begin{cases} 1 & si\ x = y \\ 0 & si\ x \neq y. \end{cases}$$

Nous l'utiliserons quand x, y sont tous les deux des entiers ou des sous-ensembles de $\mathbb{N}$.

Définition 37. *Un* intervalle troué spécial $I_m(a, h)$, *où $m \leq a$ sont des entiers positifs et $h \in \{\delta_{m,a}, 2\}$, est un intervalle troué à h trous de la forme :*

$$I_m(a,h) = \begin{cases} I_m(m,1) &=& [m, 2m+1] \setminus \{m+1\} & si\ a = m \\ I_m(m,2) &=& [m, 2m+2] \setminus \{m+2, 2m+1\} & si\ a = m \\ I_m(a,0) &=& [a, a+m-1] & si\ a > m \\ I_m(a,2) &=& [a, a+m+1] \setminus \{a+1, a+m\} & si\ a > m. \end{cases}$$

Nous écrirons souvent sp-intervalle *et nous disons aussi* intervalle spécial *à la place de "intervalle troué spécial".*

Exemples 38.

— *Pour $m = 3$, $a = 19$ et $h = 2$, nous avons*

$$\begin{aligned} I_3(19, 2) &= [19, 23] \setminus \{20, 22\} \\ &= \{19, 21, 23\}. \end{aligned}$$

— *Pour $m = a = 9$ et $h = 1$, nous avons*

$$\begin{aligned} I_9(9, 1) &= [9, 19] \setminus \{10\} \\ &= \{9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19\}. \end{aligned}$$

Notons que

1. $a = \min I_m(a, h)$,
2. pour tout $m \geq 2$, l'ensemble $I_m(a, h)$ a h trous comme indiqué ci-dessus, et
3. $|I_m(a,h)| = m + \delta_{m,a} = \begin{cases} m+1 & \text{si } a = m, \\ m & \text{si } a > m. \end{cases}$, pour $m \geq 2$.

Pour $m = 1 < a$, nous avons : $|I_1(1, 1)| = 2$, $|I_1(1, 2)| = 3$, $|I_1(a, 2)| = 2$, $|I_1(a, 0)| = 1$.

Propriétés des sp-intervalles

Nous allons montrer ici que les ensembles $I_m(a, h)$ sont libres de sommes et maximaux dans un sens approprié. Premièrement une définition :

Définition 39. *Soient $m \leq a < b$ trois entiers positifs. L'ensemble $\texttt{Weak}_m[a, b]$ est défini comme étant l'ensemble de tous les sous-ensembles $F \subseteq [a, b]$ tels que*

1. *$\{a, b\} \subseteq F \subseteq [a, b]$,*
2. *$F \cup \{m\}$ est libre de somme,*
3. *F est maximal par rapport aux conditions 1 et 2 ci-dessus.*

Un ensemble F qui satisfait les conditions 1,2 et 3 sera appelé ensemble m-maximal faiblement libre de somme *ou* m-maximal.

$$\texttt{Weak}_m[a, b] = \{F \subseteq \mathbb{N} \mid \min F = a,\ \max F = b \mid F\ m - \text{maximal.}\}$$

Exemples 40.
— $\texttt{Weak}_4[4, 9] = \{\ [4, 9] \setminus \{5\}\ \}$,
— $\texttt{Weak}_3[4, 9] = \{\ [4, 9] \setminus \{5, 6, 7\}\ \}$,
— $\texttt{Weak}_2[9, 12] = \{\ [9, 13] \setminus \{10, 11\},\ [9, 13] \setminus \{11, 12\}\ \}$. *L'ensemble*

$$I = [9, 13] \setminus \{11\} = \{9, 10, 12, 13\}$$

n'est pas dans $\texttt{Weak}_2[9, 12]$ car $I \cup \{2\}$ n'est pas libre de somme.

Soit $F \in \texttt{Weak}_m[\min F, \max F]$, si I est un ensemble tel que $\min I = \min F$ et $\max I = \max F$, avec $I \cup \{m\}$ faiblement libre de somme et $F \subseteq I$, alors $I = F$.

Proposition 41. *Soient m, a deux entiers positifs tels que $m \leq a$. Nous avons :*

$$\begin{aligned} I_m(a, 0) &\in \texttt{Weak}_m[a, a + m{-}1], && (1.1)\\ I_m(a, 2) &\in \texttt{Weak}_m[a, a + m + 1], && (1.2)\\ I_m(m, 1) &\in \texttt{Weak}_m[m, 2m + 1], && (1.3)\\ I_m(m, 2) &\in \texttt{Weak}_m[m, 2m + 2]. && (1.4) \end{aligned}$$

Démonstration. Nous prouvons seulement (1.2). Les autres preuves sont similaires et laissées au lecteur.

Soient $x, y \in I_m(a, 2) = [a, a + m + 1] \setminus \{a + 1, a + m\}$, avec $m < a \leq x < y$. Nous avons

$$x + y \geq 2a + 2 > a + m + 1,$$

par conséquent $I_m(a, 2)$ est faiblement libre de somme. Nous avons aussi

$$m + x, m + y \in [a + m, a + 2m + 1] \setminus \{a + m + 1, a + 2m\}$$

d'où $m + x, m + y \notin I_m(a, 2) \cup \{m\}$. Ainsi $I_m(a, 2) \cup \{m\}$ est faiblement libre de somme.

Soit $I \subseteq [a, a + m + 1]$ un ensemble d'entiers tel que $a, a + m + 1 \in I$ et $I \cup \{m\}$ est faiblement libre de somme. D'où

$$a + m \notin I$$

et

$$(a + m + 1) - m = a + 1 \notin I,$$

c'est-à-dire

$$I \subseteq [a, a + m + 1] \setminus \{a + 1, a + m\} = I_m(a, 2).$$

Donc $I_m(a, 2)$ est m-maximal, tel que

$$\{a, a + m + 1\} \subseteq I_m(a, 2) \subseteq [a, a + m + 1],$$

alors $I_m(a, 2) \in \mathtt{Weak}_m[a, a + m + 1]$.

□

En d'autres termes, cette proposition donne les propriétés de $I_m(a, h)$ qui sont :

1. $I_m(a,h) \subseteq [a, a+m+h-(1-\delta_{m,a})] = \begin{cases} [m, 2m+1] & \text{si } m = a \text{ et } h = 1 \\ [m, 2m+2] & \text{si } m = a \text{ et } h = 2 \\ [a, a+m-1] & \text{si } m < a \text{ et } h = 2 \\ [a, a+m+1] & \text{si } m < a \text{ et } h = 2. \end{cases}$
2. $a, a + m + h - (1 - \delta_{m,a}) \in I_m(a, h)$.
3. $I_m(a, h) \cup \{m\}$ est faiblement libre de somme.
4. Et $I_m(a, h)$ est maximal par rapport aux propriétés précédentes.

Nous remarquons aussi que nous pouvons écrire $I_m(a, h)$ sur une ligne comme

$$I_m(a, h) = [a, a + m + h - (1 - \delta_{m,a})] \setminus \{a + h - (1 - \delta_{m,a}), a + m + \delta_{m,a}(3 - h)\}.$$

1.2 Ensembles semi-spéciaux

Nous aurons besoin de réunions des *sp-intervalles.*

Définition 42. *Un* ensemble semi-spécial *est une réunion finie d'intervalles spéciaux. En d'autres termes, c'est un ensemble A de la forme*

$$A = I_{m_1}(a_1, h_1) \cup I_{m_2}(a_2, h_2) \cup \ldots \cup I_{m_l}(a_l, h_l),$$

où les a_i sont des entiers positifs deux à deux distincts.

Exemple 43. *Les quatre parties A_1, A_2, A_3, A_4 de l'Exemple 33 sont des ensembles semi-spéciaux. En effet, une simple comparaison montre que*

$$A_1 = I_1(1, 2) \cup I_1(8, 0) \cup I_1(11, 0) \cup I_1(22, 0) \cup I_1(25, 0) \cup I_1(50, 0) \cup I_1(63, 0)$$
$$A_2 = I_3(3, 1) \cup I_3(19, 2) \cup I_3(51, 0) \cup I_3(64, 0)$$
$$A_3 = I_9(9, 2) \cup I_9(54, 0)$$
$$A_4 = I_{24}(24, 1).$$

Étant donné un entier positif k, comme dans l'Exemple 43, nous proposons d'utiliser des ensembles semi-spéciaux pour construire k parties faiblement libres de sommes $A_1, \ldots, A_k$ de $[1, n]$, c'est-à-dire, pour $1 \leq i \leq k$, A_i est un ensemble semi-spécial tel que

$$A_i = I_{m_1^i}(a_1^i, h_1^i) \cup \cdots \cup I_{m_{n_i}^i}(a_{n_i}^i, h_{n_i}^i)$$

et $a_1^i < a_2^i < \cdots < a_{n_i}^i$. Nous avons vu dans la Proposition 41 que $I_{m_j^i}(a_j^i, h_j^i)$ est faiblement libre de somme pour chaque i, j, mais ce n'est pas nécessairement le cas pour leur réunion. Nous aurons besoin de conditions sur une réunion de sp-intervalles assurant qu'elle est faiblement libre de somme.

Critère pour être faiblement libre de somme

Les assertions suivantes donnent quelques conditions nécessaires sur un ensemble semi-spécial pour qu'il soit faiblement libre de somme.

Affirmation 44. *Soit $A = I_{m_1}(a_1, h_1) \cup I_{m_2}(a_2, h_2) \cup \cdots \cup I_{m_n}(a_n, h_n)$ un ensemble semi-spécial avec $m_1 = a_1 < a_2 < \cdots < a_n$.*

Si A est faiblement libre de somme, alors $m_j < a_j$ pour $2 \leq j \leq n$.

Démonstration. Rappelons que $m_j \leq a_j$ pour tout j par définition des sp-intervalles. Supposons qu'il existe un entier j avec $2 \leq j \leq n$ tel que $m_j = a_j$. Nous allons montrer que A n'est pas un ensemble faiblement libre de somme.

Par hypothèse, $m_j = a_j > a_1 = m_1$, nous avons $m_j - 1 \geq m_1$ parce que $j \geq 2$ et $m_1 \in A$.

— Si $m_1 > 2$, nous avons $2 < m_1 \leq m_j - 1$, c'est-à-dire

$$m_j + 2 < m_j + m_1 \leq 2m_j - 1.$$

Alors

$$m_j, m_j + m_1 \in I_{m_j}(m_j, h_j) \subseteq A$$

et

$$m_1 \in I_{m_1}(m_1, h_1) \subseteq A,$$

donc A n'est pas faiblement libre de somme.

— Si $m_1 = 2$, nous avons :

— Si $h_j = 1$, alors

$$m_j + 2 \in I_{m_j}(m_j, 1) \subseteq A$$

par conséquent A n'est pas faiblement libre de somme car

$$m_1 = 2, m_j, m_j + 2 \in A.$$

— Si $h_j = 2$, alors

$$m_j + 1, m_j + 3 \in I_{m_j}(m_j, 2) \subseteq A,$$

donc A n'est pas faiblement libre de somme puisque

$$2, m_j + 1, m_j + 3 \in A.$$

— Si $m_1 = 1$, nous avons :

— Si $h_j = 1$, alors

$$2m_j, 2m_j + 1 \in I_{m_j}(m_j, 1) \subseteq A,$$

d'où

$$1, 2m_j, 2m_j + 1 \in A$$

en d'autres termes A n'est pas faiblement libre de somme.

— Si $h_j = 2$ par conséquent $m_j + 1 \in I_{m_j}(m_j, 2) \subseteq A$ et alors A n'est pas faiblement libre de somme car

$$1, m_j, m_j + 1 \in A.$$

Nous concluons que si A est faiblement libre de somme alors pour tout $2 \leq j \leq n$ nous avons $m_j < a_j$, c'est-à-dire, $h_j \in \{0, 2\}$. $\square$

Affirmation 45. *Soit $A = I_{m_1}(a_1, h_1) \cup I_{m_2}(a_2, h_2) \cup \cdots \cup I_{m_n}(a_n, h_n)$ un ensemble semi-spécial tel que $2 \leq m_1 = a_1 < a_2 < \cdots < a_n$.*

Si A est faiblement libre de somme, alors $m_j \leq m_1$ pour $2 \leq j \leq n$.

Démonstration. Supposons qu'il existe un entier $j \in [2, n]$ tel que $m_j > m_1$, c'est-à-dire, $m_j - 1 \geq m_1$. Par l'Affirmation 44, nous avons $m_j < a_j$ alors $h_j \in \{0, 2\}$, c'est-à-dire, soit

$$I_{m_j}(a_j, 0) = [a_j, a_j + m_j - 1],$$

soit

$$I_{m_j}(a_j, 2) = (\{a_j\} \cup [a_j + 2, a_j + m_j - 1] \cup \{a_j + m_j + 1\})$$

est inclus dans A.

Par hypothèse $m_1 \geq 2$, alors $2 \leq m_1 \leq m_j - 1$, c'est-à-dire,

$$a_j + 2 \leq a_j + m_1 \leq a_j + m_j - 1.$$

Donc

$$a_j + m_1 \in I_{m_j}(a_j, h_j) \subseteq A,$$

par conséquent A n'est pas faiblement libre de somme car

$$m_1, a_j, a_j + m_1 \in \big(I_{m_1}(m_1, h_1) \cup I_{m_j}(a_j, h_j)\big) \subseteq A.$$

Ainsi, si A est faiblement libre de somme alors $m_j \leq m_1$, pour tout $1 \leq j \leq n$. $\square$

En résumé, si un ensemble semi-spécial

$$A = I_{m_1}(a_1, h_1) \cup I_{m_2}(a_2, h_2) \cup \cdots \cup I_{m_n}(a_n, h_n),$$

avec $2 \leq m_1 = a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, est faiblement libre de somme, alors, pour $i \geq 2$

$$m_i < a_i \quad \text{et} \quad m_i \leq m_1.$$

1.3 Ensemble spécial

Maintenant, nous nous concentrons sur un ensemble semi-spécial particulier qui vérifie les conditions nécessaires pour être faiblement libre de somme.

Définition 46. *Un* ensemble spécial *A est un ensemble semi-spécial tel que tous ses sp-intervalles $I_{m_i}(a_i, h_i)$ ont les mêmes indices $m_i = \min A$.*

En d'autres termes, un ensemble semi-spécial

$$A = I_{m_1}(a_1, h_1) \cup I_{m_2}(a_2, h_2) \cup \cdots \cup I_{m_n}(a_n, h_n)$$

est un *ensemble spécial* si

$$m_1 = m_2 = \cdots = m_n = m = a_1 < a_2 < \cdots < a_n.$$

Par conséquent A est de la forme :

$$A = I_m(m, h_1) \cup I_m(a_2, h_2) \cup \cdots \cup I_m(a_n, h_n).$$

Nous allons utiliser une notation spécifique pour les ensembles spéciaux.

Notation 47. *Soit* $A = I_m(m, h_1) \cup I_m(a_2, h_2) \cup \cdots \cup I_m(a_n, h_n)$ *un ensemble spécial, avec* $m = a_1 < a_2 < \cdots < a_n$*. Alors nous dénotons* A *comme suit :*

$$A = \langle m, h_1\rangle\langle a_2, h_2\rangle \cdots \langle a_n, h_n\rangle.$$

Par conséquent $I_m(a_i, h_i) = \langle a_i, h_i\rangle$ pour $1 \leq i \leq n$, l'indice des $\langle a_i, h_i\rangle$ est $m = \min A$.

Exemple 48. *Réécrivons les parties* A_1, A_2, A_3, A_4 *de* [66]*, de l'Exemple 43, avec cette nouvelle notation :*

$$\begin{aligned}
A_1 &= \langle 1, 2\rangle\langle 8, 0\rangle\langle 11, 0\rangle\langle 22, 0\rangle\langle 25, 0\rangle\langle 50, 0\rangle\langle 63, 0\rangle \\
A_2 &= \langle 3, 1\rangle\langle 19, 2\rangle\langle 51, 0\rangle\langle 64, 0\rangle \\
A_3 &= \langle 9, 2\rangle\langle 54, 0\rangle \\
A_4 &= \langle 24, 1\rangle.
\end{aligned}$$

Ici, nous avons

$$\langle 19, 2\rangle = I_3(19, 2) = [19, 23] \setminus \{20, 22\} = \{19, 21, 23\}.$$

Si $a > 1$ *nous avons* $I_1(a, 0) = \langle a, 0\rangle = \{a\}$*. Par commodité pour* $m = 1$*, au lieu d'utiliser la nouvelle notation nous énumérons simplement*

$$A_1 = \{1, 2, 4, 8, 11, 22, 25, 50, 63\}.$$

Rappelons qu'un ensemble spécial

$$A = I_{m_1}(m_1, h_1) \cup I_{m_2}(a_2, h_2) \cup \cdots \cup I_{m_n}(a_n, h_n),$$

avec $m_1 = a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, remplit les conditions

$$m_j = m \leq m_1 = m$$

pour tout j et $m_j < a_j$ si $j \geq 2$, qui sont des conditions nécessaires sur un ensemble semi-spécial pour qu'il soit faiblement libre de somme. Voir Affirmation 45 et 44.

Critère pour être faiblement libre de somme

Ici, nous donnons des conditions nécessaires pour qu'un ensemble spécial soit faiblement libre de somme.

Affirmation 49. *Soit* $A = I_m(m, h_1) \cup I_m(a_2, h_2) \cup \cdots \cup I_m(a_n, h_n)$ *un ensemble spécial tel que* $3 \leq m = a_1 < a_2 < \cdots < a_n$*.*

Si A *est faiblement libre de somme, alors pour* $1 \leq i < n$ *nous avons*

$$\begin{cases} a_{i+1} > \max I_m(a_i, h_i) \\ \textit{ou} \\ I_m(a_i, h_i) \supseteq I_m(a_{i+1}, h_{i+1}). \end{cases}$$

Remarquons que : $(a_{i+1} > \max I_m(a_i, h_i)) \Longrightarrow (I_m(a_i, h_i) \cap I_m(a_{i+1}, h_{i+1}) = \emptyset)$.

Démonstration. Supposons qu'il existe un entier $i \in [1, n-1]$ tel que

$$a_{i+1} \leq \max I_m(a_i, h_i).$$

Nous allons montrer que soit $I_m(a_i, h_i) \supseteq I_m(a_{i+1}, h_{i+1})$ soit A n'est pas faiblement libre de somme.

1. Si $I_m(a_i, h_i) \cap I_m(a_{i+1}, h_{i+1}) = \emptyset$ alors

$$a_{i+1} \notin I_m(a_i, h_i).$$

Puisque

$$a_i < a_{i+1} \leq \max I_m(a_i, h_i)$$

nous avons, par la Proposition 41 que

$$I_m(a_i, h_i) \cup \{a_{i+1}\}$$

n'est pas faiblement libre de somme. Cela est dû à la Propriété 1.1 : $I_m(a_i, h_i)$ est un sous-ensemble $[a_i, \max I_m(a_i, h_i)]$ m-maximal, c'est-à-dire, le plus grand ensemble maximal inclus dans $[a_i, \max I_m(a_i, h_i)]$ et contenant a_i et $\max I_m(a_i, h_i)$. Ainsi A n'est pas faiblement libre de somme.

2. Si $I_m(a_i, h_i) \cap I_m(a_{i+1}, h_{i+1}) \neq \emptyset$: Puisque $a_i < a_{i+1}$, nous avons :

$$\text{soit} \quad a_{i+1} - 1 \in I_m(a_i, h_i), \quad \text{soit} \quad a_{i+1} - 2 \in I_m(a_i, h_i).$$

Par hypothèse $m \geq 3$, nous avons

$$a_{i+1} + 1 \leq a_{i+1} + m - 2 \leq a_{i+1} + m - 1$$

et

$$a_{i+1} + m - 1 \in A.$$

- Si $a_{i+1} - 1 \in I_m(a_i, h_i)$ nous avons :
  - Si $a_{i+1} - 1 \neq m$, alors A n'est pas faiblement libre de somme, car

    $$m, a_{i+1} - 1, a_{i+1} + m - 1 \in A.$$

  - Si $a_{i+1} - 1 = m$, alors $i = 1$ et $a_2 = m + 1$, nous avons :
    - Si $a_2 + m = 2m + 1 \in A$, alors A n'est pas faiblement libre de somme, car

      $$m, m+1, 2m+1 \in A.$$

    - Si $2m + 1 \notin A$, c'est-à-dire, $a_2 + m + 1 = 2m + 2 \in A$, nous avons :
      - ⋆ Si $m + 2 = a_2 + 1 \in A$, alors

        $$m, m+2, 2m+2 \in A,$$

        donc A n'est pas libre de somme.
      - ⋆ Si $m + 2 = a_2 + 1 \notin A$, alors $m + 2 \notin I_m(m, h_1)$ ainsi $h_1 = 2$, et $a_2 + 1 \notin I_m(a_2, h_2)$ d'où $h_2 = 2$, nous obtenons le cas

        $$I_m(m, 2) \supseteq I_m(m+1, 2).$$

- Si $a_{i+1} - 1 \notin I_m(a_i, h_i)$, alors $a_{i+1} - 2 \in I_m(a_i, h_i)$:
  - Si $a_{i+1} - 2 \neq m$, nous avons :
    - ∗ Si $a_{i+1} + m - 2 \in A$, alors A n'est pas faiblement libre de somme, car
    $$m, a_{i+1} - 2, a_{i+1} + m - 2 \in A.$$
    - ∗ Si $a_{i+1} + m - 2 \notin A$, alors $a_{i+1} + m - 2 = a_{i+1} + 1$ ainsi
    $$m = 3$$
    et
    $$a_{i+1} + m + 1 = a_{i+1} + 4 \in I_3(a_{i+1}, 2) = \{a_{i+1}, a_{i+1} + 2, a_{i+1} + 4\} \subseteq A.$$
    Pour $h_1 = 1, 2$ nous avons
    $$2m = 6 \in I_3(3, h_1) \subseteq A.$$
      - ⋆ Si $a_{i+1} - 2 \neq 6$, alors A n'est pas faiblement libre de somme car
      $$6, a_{i+1} - 2, a_{i+1} + 4 \in A.$$
      - ⋆ Si $a_{i+1} - 2 = 6$, c'est-à-dire, $a_{i+1} = 8$, alors
      $$I_3(3, 2) = \{3, 4, 6, 8\} \subseteq A$$
      donc A n'est pas faiblement libre de somme, car
      $$4, a_{i+1}, a_{i+1} + 4 \in A.$$
  - Si $a_{i+1} - 2 = m$, alors $i = 1$ et $a_1 = m$ ainsi
  $$a_2 - 1 = m + 1 \notin I_m(m, h_1),$$
  donc nous avons $h_1 = 1$ et $I_m(m, 1) \subseteq A$.
    - ∗ Si $2m + 3 = a_2 + m + 1 \in A$, alors A n'est pas faiblement libre de somme, car
    $$a_1 = m, m + 3, 2m + 3 \in A.$$
    - ∗ Si $a_2 + m + 1 \notin A$, alors $h_2 = 0$ donc nous avons
    $$I_m(m, 1) \supseteq I_m(m + 2, 0).$$

□

Notons que l'hypothèse $m \geq 3$ est essentielle dans l'Affirmation 49. Voici des contre-exemples pour $m \leq 2$.

Pour $m = 2$, pour tout entier $a_i > 7$, l'ensemble spécial
$$A = I_2(2, 1) \cup I_2(a_i, 2) \cup I_2(a_i + 3, 2) = \{2, 4, 5, a_i, a_i + 3, a_i + 6\}$$
est faiblement libre de somme alors que
$$a_i + 3 \in I_2(a_i, 2) \cap I_2(a_i + 3, 2) \quad \text{et} \quad a_i + 6 \in I_2(a_i + 3, 2) \setminus I_2(a_i, 2).$$
De même, pour $m = 1$, pour tout entier $a_i > 4$, l'ensemble spécial
$$A = I_1(1, 1) \cup I_1(a_i, 2) \cup I_1(a_i + 2, 2) = \{1, 3, a_i, a_i + 2, a_i + 4\}$$
est faiblement libre de somme alors que
$$a_i + 2 \in I_1(a_i, 2) \cap I_1(a_i + 2, 2) \quad \text{et} \quad a_i + 4 \in I_1(a_i + 2, 2) \setminus I_1(a_i, 2).$$

1.4 Partitions spéciales

Nous introduisons quelques définitions en relation avec les partitions qui utilisent exclusivement les ensembles spéciaux.

Définition 50. *Soient k, m deux entiers positifs. Une k-*partition spéciale *$\mathcal{P}$ de $[m]$ est une partition de $[m]$ en k parties faiblement libres de sommes qui sont des ensembles spéciaux.*

Définition 51. *Soit k un entier positif. Nous définissons le nombre $N(k)$ comme le plus grand entier m tel qu'il existe une k-partition spéciale de $[m]$.*

Nous avons

$$N(k) = \max\{m \in \mathbb{N} \mid \exists \mathcal{P}\ k\text{-partition spéciale de } [m]\}.$$

Bien sûr, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$N(k) \leq WS(k).$$

Une *k-partition spéciale maximale* est une k-partition spéciale de $[N(k)]$. Un entier m est un minorant de $N(k)$ s'il existe une k-partition spéciale de $[m]$.

— Nous avons
$$I_1(1, 2) = \{1, 2, 4\} \supseteq [1, 2],$$
ainsi
$$N(1) = 2,$$
car $WS(1) = 2$.

— Soient
$$A_1 = I_1(1, 2) \cup I_1(8, 0) \text{ et } A_2 = I_3(3, 1),$$
nous avons
$$[8] = A_1 \sqcup A_2$$
d'où $N(2) \geq 8$. Comme $WS(2) = 8$, alors
$$N(2) = 8.$$

— Nous avons aussi
$$N(3) = 23,$$
car $WS(3) = 23$ et nous avons une partition spéciale de $[23]$ en 3 parties A_1, A_2, A_3 :
$$\begin{aligned} A_1 &= I_1(1, 2) \cup I_1(8, 0) \cup I_3(11, 0) \cup I_1(22, 0), \\ A_2 &= I_3(3, 1) \cup I_3(19, 2), \\ A_3 &= I_9(9, 2). \end{aligned}$$

Nous remarquons que, pour $1 \leq k \leq 3$, il n'y a qu'une seule k-partition spéciale maximale de $[N(k)]$.

— Nous savons que $WS(4) = 66$. Par l'Exemple 43, nous avons $66 \leq N(4)$, d'où

$$N(4) = 66.$$

Notons qu'il y a quatre 4-partitions spéciales maximales de [66] (Voir [16], [17]).

En résumé, pour $k \leq 4$, nous avons $WS(k) = N(k)$. Pour $n = 5$, nous allons voir que $N(5) = 196$ (Par ordinateur).

Nous donnerons des minorants de $N(k)$, et donc aussi de $WS(k)$, pour $6 \leq k \leq 9$.

2 Formules de quelques sommes restreintes

Dans cette section nous étudions les sommes restreintes de deux ensembles finis, lorsqu'ils sont écrits sous la forme $[x, y] \setminus C$, et de deux intervalles spéciaux. Les formules obtenues ont été utilisées dans notre algorithme de recherche afin de l'accélérer considérablement.

2.1 Sommes restreintes de deux ensembles finis

Étant donné deux ensembles finis

$$I = [x, y] \setminus C \quad \text{et} \quad J = [r, s] \setminus H$$

avec $C \subseteq [x + 1, y - 1]$ et $K \subseteq [r + 1, s - 1]$ tels que $|C|$ et $|K|$ ne sont pas nécessairement plus petits que deux (remarquons que si $\max(|C|, |K|) \leq 2$ alors I et J sont des intervalles troués).

Par définition, $I \cup J$ est faiblement libre de somme si

$$\big(I \cup J \ \dot{+} \ I \cup J\big) \cap (I \cup J) = \emptyset.$$

Nous supposons que $I \cap J = \emptyset$, car si $L = I \cap J \neq \emptyset$, nous pouvons considérer l'ensemble fini $I' = I \setminus L = [x', y'] \setminus C'$ avec $C' \subseteq [x' + 1, y' - 1]$ et

$$I \cup J = (I \setminus L) \cup J = I' \cup J \text{ avec } I' \cap J = \emptyset.$$

Alors ici nous supposons que $I \cap J = \emptyset$ et nous avons :

$$(I \cup J) \dot{+} (I \cup J) \ = \ (I \dot{+} I) \ \cup \ (I \dot{+} J) \ \cup \ (J \dot{+} J).$$

Donc $I \cup J$ est faiblement libre de somme si pour chaque somme restreinte $S = I \dot{+} I, J \dot{+} J, I \dot{+} J$ nous avons

$$S \cap (I \cup J) = \emptyset.$$

Nous allons donner la forme de $I \dot{+} J$ quand $I = J$ ou $I \cap J = \emptyset$:

Proposition 52. *Soient deux ensembles finis d'entiers positifs*

$$I = [x, y] \setminus C \quad \text{et} \quad J = [r, s] \setminus K$$

tels que $C \subseteq [x+1, y-1]$ *et* $K \subseteq [r+1, s-1]$ *avec*

$$I = J \quad \text{ou} \quad I \cap J = \emptyset.$$

Alors il existe $H \subseteq (x + K \ \cup \ C + s)$ *tel que*

$$I \dot{+} J = [x + r + \delta_{I,J}, y + s - \delta_{I,J}] \setminus H.$$

Démonstration. Puisque

$$x \in I \subseteq [x, y]$$

et

$$s \in J \subseteq [r, s],$$

nous avons :

$$(x \dot{+} J \ \cup \ I \dot{+} s) \subseteq I \dot{+} J \subseteq ([x, y] \dot{+} [r, s]). \tag{2.1}$$

D'abord nous étudions le cas $I = J$, puis le cas $I \cap J = \emptyset$.

— Cas $I = J$, c'est-à-dire, $x = r, y = s$ et $C = K$. Nous avons

$$\begin{aligned} x \dot{+} J &= [x + r + 1, x + s] \setminus (x + C), \\ I \dot{+} s &= [x + s, y + s - 1] \setminus (K + s). \end{aligned}$$

Alors nous obtenons

$$\begin{aligned} x \dot{+} J \ \cup \ I \dot{+} s &= [x + r + 1, y + s - 1] \setminus (x + C \ \cup \ K + s), \\ [x, y] \dot{+} [r, s] &= [x + r + 1, y + s - 1]. \end{aligned}$$

En appliquant (2.1), nous avons

$$[x + r + 1, y + s - 1] \setminus (x + C \ \cup \ K + s) \subseteq I \dot{+} J \subseteq [x + r + 1, y + s - 1].$$

D'où, il existe $H \subseteq (x + C \ \cup \ K + s)$ tel que

$$I \dot{+} J = [x + r + 1, y + s - 1] \setminus H. \tag{2.2}$$

— Cas $I \cap J = \emptyset$, nous avons :

$$\begin{aligned} x \dot{+} J &= [x + r, x + s] \setminus (x + C), \\ I \dot{+} s &= [x + s, y + s] \setminus (K + s). \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} x \dot{+} J \ \cup \ I \dot{+} s &= [x + r, y + s] \setminus (x + C \ \cup \ K + s), \\ [x, y] \dot{+} [r, s] &= [x + r, y + s]. \end{aligned}$$

En appliquant (2.1), nous avons

$$[x + r, y + s] \setminus (x + C \ \cup \ K + s) \subseteq I \dot{+} J \subseteq [x + r, y + s].$$

D'où, il existe $H \subseteq (x + C \ \cup \ K + s)$ tel que

$$I \dot{+} J = [x + r, y + s] \setminus H. \tag{2.3}$$

En résumé, si $I = J$ ou $I \cap J = \emptyset$, il existe $H \subseteq (x + C \cup K + s)$ tel que

$$I \dot{+} J = [x + r + \delta_{I,J}, y + s - \delta_{I,J}] \setminus H.$$

avec $\delta_{I,J} = 1$ si $I = J$ et 0 sinon. □

Par la définition de H dans cette Proposition 52, nous avons pour tout entier $t \in [x + r + \delta_{I,J}, y + s - \delta_{I,J}]$:

$$t \in H \Leftrightarrow t \notin I \dot{+} J.$$

Puisque $H \subseteq (x + K \cup C + s)$, alors pour déterminer $I \dot{+} J$ nous devons connaître quand un élément de $(x + K \cup C + s)$ appartient à H.

Nous allons d'abord introduire une définition :

Définition 53. *Soient $z, c \in \mathbb{N}$ et $I, J \subseteq \mathbb{N}$. Nous définissons l'ensemble d'entiers $B(I, z, c, J)$ par*

$$B(I, z, c, J) = (I - z \cap c - J) \setminus \{\frac{c - z}{2}\}.$$

Exemple 54. *Soient $I = \{1, 3, 5\}$ et $J = \{2, 3, 7\}$ et $z = 1$ et $c = 5$ alors*

$$\begin{aligned} B(I, 1, 5, J) &= (I - 1 \cap 5 - J) \setminus \{\frac{5 - 1}{2}\} \\ &= (\{1, 3, 5\} - 1 \cap 5 - \{2, 3, 7\}) \setminus \{2\} \\ &= (\{0, 2, 4\} \cap \{-2, 2, 3\}) \setminus \{2\} \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$

D'après la Proposition 52, pour déterminer $I \dot{+} J$ il suffit de donner H qui lui correspond. Tel est l'objet de la proposition suivante. Remarquons que

$$(z, c) \in (\{x\} \times K \cup C \times \{s\}) \Rightarrow z + c \in (x + K \cup C + s).$$

Proposition 55. *Soient deux sous-ensembles finis non vides*

$$I = [x, y] \setminus C, \quad J = [r, s] \setminus K$$

tels que $I \cap J = \emptyset$ ou $I = J$ avec $C \subseteq [x + 1, y - 1]$ et $K \subseteq [r + 1, s - 1]$. Notons

$$I \dot{+} J = [x + r + \delta_{I,J}, y + s - \delta_{I,J}] \setminus H,$$

où $H \subseteq (x + K \cup C + s)$.

Soit $(z, c) \in (\{x\} \times K \cup C \times \{s\})$, alors nous avons :

$$z + c \in H \Leftrightarrow B(I, z, c, J) = \emptyset.$$

Démonstration. Soit

$$(z, c) \in (\{x\} \times K) \cup (C \times \{s\}) \subseteq [x, y - 1] \times [r + 1, s].$$

Nous savons, par définition de H, que

$$z + c \in I \dot{+} J \quad \text{si et seulement si} \quad z + c \notin H.$$

En d'autres termes, il existe un entier i tel que $z + i \in I$ et $c - i \in J$ car

$$z + c = (z + i) + (c - i).$$

Si $I = J$ et $z+i = c-i$, alors $(z+i)+(c-i) \notin I\dot{+}J$. Donc, si $I = J$ et $z+c \in I\dot{+}J$, nous devons ajouter la condition

$$z + i \neq c - i.$$

Remarquons que nous n'avons pas besoin d'ajouter cette dernière condition quand $I \cap J = \emptyset$.

En récapitulant, $z + c \in I\dot{+}J$ si et seulement si : il existe i tel que

$$i \in I - z, i \in c - J \text{ et } i \notin \{\frac{1}{2}(c - z)\}.$$

Cela veut dire que

$$i \in (I - z \ \cap \ c - J) \setminus \{\frac{1}{2}(c - z)\} = B(I, z, c, J),$$

qui se traduit par

$$B(I, z, c, J) \neq \emptyset.$$

□

Nous remarquons que ici nous avons

$$B(I, z, c, J) = [x - z, y - z] \cap [c - s, c - r] \setminus (C - z \ \cup \ c - K \ \cup \{\frac{1}{2}(c - z)\}).$$

Notons aussi que si $I \cap J = \emptyset$, nous avons

$$B(I, z, c, J) = [x - z, y - z] \cap [c - s, c - r] \setminus (C - z \ \cup \ c - K).$$

Remarque 56. *Étant donné un entier $m_0 \geq 2$. Soient*

$$I = [x, y] \setminus C, \quad J = [r, s] \setminus K$$

deux ensembles finis d'entiers, tels que $C \subseteq [x + 1, y - 1]$ et $K \subseteq [r + 1, s - 1]$ avec

$$|C| \leq m_0, \quad |K| \leq m_0.$$

Par la Proposition 52, il existe

$$H \subseteq (x + K \ \cup \ C + s)$$

tel que

$$I\dot{+}J = [x + r + \delta_{I,J}, y + s - \delta_{I,J}] \setminus H.$$

Alors

$$|H| \leq |C| + |K| \leq 2m_0.$$

Donc pour connaître $I\dot{+}J$, nous appliquons au plus $2m_0$ fois la Proposition 55 sur les éléments de $(x + K \ \cup \ C + s)$. D'où, le coût de l'implémentation de la somme restreinte de $I\dot{+}J$ dépend seulement de m_0, mais ne dépend pas du cardinal de I et J. Voilà pourquoi nous avons choisi $m_0 = 2$, donnant lieu aux intervalles troués et sp-intervalles.

2.2 Sommes restreintes de deux intervalles spéciaux dans un ensemble spécial

Ici nous considérons un ensemble spécial A, c'est-à-dire,

$$A = I_m(m, h_1) \cup I_m(a_2, h_2) \cup \cdots \cup I_m(a_n, h_n) = \bigcup_{i=1}^{n} I_m(a_i, h_i)$$

tel que $m = a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ et $h_i \in \{\delta_{i,1}, 2\}$ pour $1 \leq i \leq n$ avec $I_m(a_i, h_i) \cap I_m(a_j, h_j) = \emptyset$ si $i \neq j$.

La somme restreinte de A avec lui même est :

$$\begin{aligned} A \dot{+} A &= \bigcup_{i=1}^{n} I_m(a_i, h_i) \dot{+} \bigcup_{j=1}^{n} I_m(a_j, h_j) \\ &= \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=i}^{n} \left(I_m(a_i, h_i) \dot{+} I_m(a_j, h_j) \right). \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} (A \dot{+} A) \cap A &= \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=i}^{n} \left(I_m(a_i, h_i) \dot{+} I_m(a_j, h_j) \right) \bigcap \bigcup_{k=1}^{n} I_m(a_k, h_k) \\ &= \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=i}^{n} \bigcup_{k=j}^{n} \Big(\left(I_m(a_i, h_i) \dot{+} I_m(a_j, h_j) \right) \cap I_m(a_k, h_k) \Big). \end{aligned}$$

Affirmation 57. *L'ensemble spécial $A = \bigcup_{i=1}^{n} I_m(a_i, h_i)$ est faiblement libre de somme si et seulement si pour tous entiers $1 \leq i \leq j \leq k \leq n$, nous avons :*

$$\left(I_m(a_i, h_i) \dot{+} I_m(a_j, h_j) \right) \cap I_m(a_k, h_k) = \emptyset. \tag{2.4}$$

En d'autres termes, A n'est pas faiblement libre de somme s'il existe $1 \leq i \leq j \leq k \leq n$ tel que

$$\left(I_m(a_i, h_i) \dot{+} I_m(a_j, h_j) \right) \cap I_m(a_k, h_k) \neq \emptyset. \tag{2.5}$$

Alors nous devons savoir $I_m(a_i, h_i) \dot{+} I_m(a_j, h_j)$ pour tout $1 \leq i \leq j \leq n$. Cette somme restreinte est de la forme :

$$\begin{aligned} &I_m(a_i, h_i) \dot{+} I_m(a_i, h_i) \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n, \\ &I_m(a_i, h_i) \dot{+} I_m(a_j, h_j) \quad \text{pour } i \neq j, \end{aligned}$$

avec $I_m(a_i, h_i) \cap I_m(a_j, h_j) = \emptyset$ si $i \neq j$.

En utilisant les Propositions 52 et 55, nous donnons les formules sur les sommes restreintes de deux intervalles spéciaux. Premièrement, nous donnons la somme restreinte de $I_m(a, h)$ avec lui même. Ensuite, nous déterminons la somme restreinte de deux intervalles spéciaux disjoints. Rappelons que l'intervalle spécial $I_m(a, h) = \langle a, h \rangle$ est défini par

$$\begin{cases} I_m(m, 1) &= [m, 2m+1] \setminus \{m+1\} & \text{si } a = m \\ I_m(m, 2) &= [m, 2m+2] \setminus \{m+2, 2m+1\} & \text{si } a = m \\ I_m(a, 0) &= [a, a+m-1] & \text{si } a > m \\ I_m(a, 2) &= [a, a+m+1] \setminus \{a+1, a+m\} & \text{si } a > m. \end{cases}$$

Proposition 58. *Soient m, a deux entiers positifs avec $m < a$. Nous avons :*

$$I_m(a,0)\dot{+}I_m(a,0) = [2a+1, 2a+2m-3], \quad \textit{pour tout } m \in \mathbb{N}$$

$$I_m(a,2)\dot{+}I_m(a,2) = \begin{cases} [2a+2, 2a+2m] \setminus \{2a+m\} & \textit{si } m \leq 4, \\ [2a+2, 2a+2m] & \textit{si } m \geq 5. \end{cases} \tag{2.6}$$

$$I_m(m,1)\dot{+}I_m(m,1) = \begin{cases} \{4\} & \textit{si } m = 1 \\ \{6,7,9\} & \textit{si } m = 2 \\ [2m+2, 4m+1] & \textit{si } m \geq 3. \end{cases}$$

$$I_m(m,2)\dot{+}I_m(m,2) = \begin{cases} \{3,5,6\} & \textit{si } m = 1, \\ \{5,8,9\} & \textit{si } m = 2, \\ [2m+1, 4m+2] \setminus \{2m+2, 3m+4\} & \textit{si } m = 3,4, \\ [2m+1, 4m+2] \setminus \{2m+2\} & \textit{si } m \geq 5. \end{cases}$$

Démonstration. Nous choisissons de montrer seulement (2.6). Les preuves des autres cas sont similaires.

D'après la Proposition 52, il existe un ensemble

$$H \subseteq \{2a+1, 2a+m, 2a+m+2, 2a+2m+1\},$$

tel que

$$I_m(a,2)\dot{+}I_m(a,2) = [2a+1, 2a+2m+1] \setminus H.$$

Soit

$$(z,c) \in \big(\{a\} \times \{a+1, a+m\}\big) \cup \big(\{a+1, a+m\} \times \{a+m+1\}\big).$$

Par la Proposition 55 nous avons $z + c \in H$ si et seulement si :

$$B(I_m(a,2), z, c, I_m(a,2)) = \emptyset.$$

Rappelons que

$$B(I_m(a,2), z, c, I_m(a,2)) = (I_m(a,2) - z \quad \cup \quad c - I_m(a,2)) \setminus \{\frac{c-z}{2}\}.$$

- Pour $z = a$ et $c = a+1$, nous avons $z+c = 2a+1$, en appliquant la Proposition 55 nous avons :

$$\begin{aligned} B(I_m(a,2), z, c, I_m(a,2)) &= [0, m+1] \cap [-m, 1] \setminus \{1, m+1, 0, -m, \frac{1}{2}\} \\ &= \emptyset, \end{aligned}$$

  pour tout entier m. Alors

$$2a + 1 \in H \quad \text{pour tout entier } m.$$

- Pour $z = a$ et $c = a + m$, nous avons $z + c = 2a + m$. Nous avons

$$B(I_m(a,2), z, c, I_m(a,2)) = [0, m+1] \cap [-1, m] \setminus \{1, m, 0, m-1, \frac{m}{2}\}.$$

  Puisque $B(I_m(a,2), z, c, I_m(a,2)) = \emptyset$ si $m \leq 4$, alors par la Proposition 55

$$2a + m \in H \text{ si } m \leq 4.$$

- Pour $z = a+1$ et $c = a+m+1$, c'est-à-dire, $z+c = 2a+m+2$. Nous avons :

$$B(I_m(a,2), z, c, I_m(a,2)) = [-1, m] \cap [0, m+1] \setminus \{0, m-1, m, 1, \frac{m}{2}\}.$$

Comme $B(I_m(a,2), z, c, I_m(a,2)) = \emptyset$ si $m \leq 4$, alors

$$2a+m+2 \in H \text{ si } m \leq 4.$$

- Pour $z = a+m$ et $c = a+m+1$, c'est-à-dire, $z+c = 2a+m+1$. Nous avons :

$$\begin{aligned} B(I_m(a,2), z, c, I_m(a,2)) &= [-m, 1] \cap [0, m+1] \setminus \{1-m, 0, m, 1\} \\ &= \emptyset, \end{aligned}$$

pour tout entier m. Alors, nous avons

$$2a+2m+1 \in H \text{ pour tout } m \in \mathbb{N}.$$

En récapitulant, nous avons

$$H = \begin{cases} \{2a+1, 2a+m, 2a+m+1, 2a+2m+2\} & \text{si } m \leq 4 \\ \{2a+1, 2a+2m+1\} & \text{si } m > 4. \end{cases}$$

D'où $I_m(a,2) \dot{+} I_m(a,2)$ est de la forme

$$\begin{cases} [2a+1, 2a+2m+1] \setminus \{2a+1, 2a+m, 2a+m+1, 2a+2m+2\} & \text{si } m \leq 4 \\ [2a+1, 2a+2m+1] \setminus \{2a+1, 2a+2m+1\} & \text{si } m \geq 5. \end{cases}$$

En simplifiant, nous obtenons (2.6). □

Maintenant, nous allons déterminer les sommes restreintes de $I_m(a,h)$ et $I_m(a',h')$ où $m \leq a, a'$ et $I_m(a,h) \neq I_m(a',h')$, c'est-à-dire, d'après l'Affirmation 49

$$I_m(a,h) \cap I_m(a',h') = \emptyset.$$

Puisque $a \in I_m(a, \delta_{m,a}) \cap I_m(a,2)$ pour $m \leq a$, alors nous avons sept sommes restreintes de deux sp-intervalles disjoints possibles.

Proposition 59. *Soient m, a, a' trois entiers positifs tels que $m < a, a'$ et $a \neq a'$. Nous avons :*

$$I_m(m,1)\dot{+}I_m(a,0) = \begin{cases} [a+1, a+3] \setminus \{a+2\} & si\ m = 1 \\ [a+m, a+3m] & si\ m > 1 \end{cases}$$

$$I_m(m,1)\dot{+}I_m(a,2) = \begin{cases} [a+m, a+3m+2] \setminus \{a+m+1, a+2m+2\} & si\ m \leq 2 \\ [a+m, a+3m+2] \setminus \{a+m+1\} & si\ m \geq 3 \end{cases} \tag{2.7}$$

$$I_m(m,2)\dot{+}I_m(a,0) = \begin{cases} [a+m, a+3m+1] \setminus \{a+2m+1\} & si\ m \leq 2 \\ [a+m, a+3m+1] & si\ m \geq 3 \end{cases}$$

$$I_m(m,2)\dot{+}I_m(a,2) = \begin{cases} [a+1, a+10] \setminus \{a+5, a+7, a+9\} & si\ m = 1 \\ [a+2, a+9] \setminus \{a+4, a+7, a+8\} & si\ m = 2 \\ [a+3, a+12] \setminus \{a+9, a+11\} & si\ m = 3 \\ [a+m, a+3m+3] \setminus \{a+3m+2\} & si\ m \geq 4 \end{cases}$$

$$I_m(a,0)\dot{+}I_m(a',0) = [a+a', a+a'+2m-2] \quad pour\ tout\ m \in \mathbb{N}$$

$$I_m(a,0)\dot{+}I_m(a',2) = \begin{cases} [a+a', a+a'+2m+2] \setminus \{a+a'+m\} & si\ m \leq 2 \\ [a+a', a+a'+2m+2] & si\ m \geq 3 \end{cases}$$

$$I_m(a,2)\dot{+}I_m(a',2) = \begin{cases} [a+a', a+a'+4] \setminus \{a+a'+1, a+a'+3\} & si\ m = 1 \\ [a+a', a+a'+6] \setminus \left\{\begin{matrix} a+a'+1, a+a'+2, \\ a+a'+4, a+a'+5 \end{matrix}\right\} & si\ m = 2 \\ [a+a', a+a'+8] \setminus \left\{\begin{matrix} a+a'+1, a+a'+3, \\ a+a'+5, a+a'+7 \end{matrix}\right\} & si\ m = 3 \\ [a+a', a+a'+2m+2] \setminus \{a+a'+1, a+a'+2m+1\} & si\ m \geq 4. \end{cases}$$

Démonstration. Ici, nous montrons seulement l'égalité (2.7). Les preuves des autres cas sont similaires. D'après la Proposition 52, il existe un ensemble

$$H \subseteq \{a+m+1, a+2m, a+2m+2\}$$

tel que

$$I_m(m,1)\dot{+}I_m(a,2) = [a+m, 2a+3m+2] \setminus H.$$

Soit

$$(z,c) \in (\{m\} \times \{a+1, a+m\}) \cup (\{m+1\} \times \{a+m+1\}).$$

D'après la Proposition 55, nous avons $z + c \in H$ si et seulement si

$$B(I_m(m,1), z, c, I_m(a,2)) = \emptyset,$$

avec $B(I_m(m,1), z, c, I_m(a,2)) = I_m(m,1) - z \quad \cap \quad c - I_m(a,2))$.

- Pour $z = m$ et $c = a+1$, c'est-à-dire, $z + c = a+m+1$, nous avons :

$$\begin{aligned} B(I_m(m,1), z, c, I_m(a,2)) &= [0, m+1] \cap [-m, 1] \setminus \{1, 0, 1-m\} \\ &= \emptyset, \end{aligned}$$

pour tout entier m. Donc

$$m + a + 1 \in H \text{ pour tout entier } m.$$

- Pour $z = m$ et $c = a + m$, c'est-à-dire, $z + c = a + 2m$, nous avons :

$$B(I_m(m, 1), z, c, I_m(a, 2)) = [0, m + 1] \cap [-1, m] \setminus \{1, m - 1, 0\}.$$

Alors, $B(I_m(m, 1), z, c, I_m(a, 2)) = \emptyset$ si $m \leq 1$. D'où

$$a + 2m \in H \text{ si } m = 1.$$

(*Le même que le cas précédent quand* $m = 1$).

- Pour $z = m + 1$ et $c = a + m$, c'est-à-dire, $z + c = a + 2m + 2$. Nous avons :

$$B(I_m(m, 1), z, c, I_m(a, 2)) = [-1, m] \cap [0, m + 1] \setminus \{0, 1, m\}.$$

Alors $B(I_m(m, 1), z, c, I_m(a, 2)) = \emptyset$ si $m \leq 2$. Donc

$$a + 2m + 2 \in H \text{ si } m \leq 2.$$

En récapitulant, nous avons

$$H = \begin{cases} \{a + m + 1, a + 2m + 2\} & \text{si } m \leq 2 \\ \{a + m + 1\} & \text{si } m > 2. \end{cases}$$

Donc, $I_m(m, 1) \dot{+} I_m(a, 2) = [a + m, 2a + 3m + 2] \setminus H$ est de la forme

$$\begin{cases} [a + m, 2a + 3m + 2] \setminus \{a + m + 1, a + 2m + 2\} & \text{si } m \leq 2 \\ [a + m, 2a + 3m + 2] \setminus \{a + m + 1\} & \text{si } m \geq 3. \end{cases}$$

□

3 Structure globale

Dans cette section, nous allons construire un mot correspondant à une partition dont les parties sont des ensembles spéciaux faiblement libres de sommes. Nous allons utiliser cette correspondance pour restreindre le champ de recherche de partitions.

3.1 Combinatoire des mots

Voici quelques rappels sur la combinatoire des mots. Voir, par exemple le livre [13] pour plus d'information. Soit L un ensemble fini. Nous considérons L comme un *alphabet* et référons à ses éléments comme des *lettres*. Une suite finie d'éléments de L est appelée un *mot* sur L (mot fini). Nous notons par juxtaposition

$$a_1 a_2 \ldots a_n$$

la suite $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ avec $a_i \in L$ pour $1 \leq i \leq n$. Fixons ϵ le mot vide (suite vide). La longueur de

$$w = a_1 a_2 \ldots a_n$$

est définie par

$$|w| = n$$

et $|\epsilon| = 0$. Nous notons L^* l'ensemble de tous les mots sur L :

$$L^* = \{ \text{ mots sur } L\} = \{w = a_1 a_2 \ldots a_m \mid m \in \mathbb{N}, a_i \in L, 1 \leq i \leq m\}.$$

Il y a un produit naturel sur L^* défini par concaténation. Étant donnés deux mots

$$w = a_1 a_2 \ldots a_m \quad \text{et} \quad v = b_1 b_2 \ldots b_n,$$

leur produit est le mot

$$wv = a_1 a_2 \ldots a_m b_1 b_2 \ldots b_n.$$

Cette opération est associative et ϵ est l'élément neutre.
Pour $w, v \in L^*$, nous disons que w est un *facteur à gauche* de v s'il existe un mot $u \in L^*$ tel que

$$v = wu.$$

La relation "*être facteur à gauche de*" est un ordre partiel et on le note $\leq$. Ainsi, par exemple, nous avons

$$\begin{array}{ll} \epsilon \leq w \leq wu \leq wuu \leq wuuw & (\text{ avec } w, u \in L^*) \\ \epsilon \leq a \leq aab \leq aabbab & (\text{ avec } a, b \in L). \end{array}$$

3.2 Une application de contraction sur les mots

Soit $R \subseteq L$. Nous définissons une application

$$\begin{aligned} \lambda_R : & L \longrightarrow L^* \\ & x \longmapsto \lambda_R(x) = \begin{cases} \epsilon & \text{si } x \in R, \\ x & \text{si } x \notin R. \end{cases} \end{aligned}$$

Son image est $Im(\lambda_R) = (L \setminus R) \cup \{\epsilon\}$. Nous définissons une extension de λ_R sur L^* par :

$$\begin{aligned} \rho_R : \quad & L^* \longrightarrow (L \setminus R)^* \\ w = a_1 a_2 \ldots \quad & a_n \longmapsto \rho_R(w) = \lambda_R(a_1)\lambda_R(a_2)\ldots\lambda_R(a_n) \mid a_i \in L \text{ pour } i \in [1, n]. \end{aligned}$$

En d'autres termes, $\rho_R(w)$ est un mot que nous obtenons quand nous supprimons toutes les lettres de R dans w. Par exemple, si

$$w = 124367162523 \in [1, 7]^*,$$

alors

$$\rho_{[1,3]}(w) = 46765,$$

3.3 Le palindrome $s(a, b)$

Un mot $w \in L^*$ est un *palindrome* si

$$w = w^R,$$

où w^R dénote le retournement de w (ou image miroir). Autrement dit, si

$$w = a_1 a_2 \ldots a_n \in L^*$$

alors

$$w^R = a_n \ldots a_2 a_1.$$

En d'autres termes, un mot

$$w = a_1 a_2 \ldots a_n$$

est un palindrome si pour tout $1 \leq i \leq n$ nous avons

$$a_i = a_{n+1-i}.$$

Nous introduisons maintenant un palindrome particulier qui va jouer un rôle important dans nos constructions. Étant donné un entier n, nous considérons l'alphabet $L = [n]$. Pour $a, b \in [n]$ tels que $a \leq b$, nous définissons le *palindrome* $s(a, b)$ de manière récursive par :

$$\begin{array}{ll} s(a,a) = a & \text{si } b = a, \\ s(a,b) = s(a,b-1)\, b\, s(a,b-1) & \text{si } b > a. \end{array}$$

Remarquons que $|s(a, b)| = 2^{b-a+1} - 1$.

Par exemples,

$$\begin{array}{rccc} s(2,5) = & s(2,4) & 5 & s(2,4) \\ = & 2324232 & 5 & 2324232, \end{array}$$

et $s(4, 6) = 4546454$.

3.4 Suite de couleurs d'une partition

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Ici, nous allons introduire le mot correspondant à une k-partition spéciale.

Soit $\mathcal{P}$ une partition de $[n]$ en k parties $A_1, A_2, \ldots, A_k$ qui sont tous des *ensembles spéciaux* faiblement libres de sommes. Nous avons pour $1 \leq i \leq k$:

$$\begin{aligned} A_i &= \langle m_i, h_1^i \rangle \langle a_2^i, h_2^i \rangle \cdots \langle a_{n_i}^i, h_{n_i}^i \rangle, \\ &= I_{m_i}(m_i, h_j^i) \cup I_{m_i}(a_2^i, h_2^i) \cup \cdots \cup I_{m_i}(a_{n_i}^i, h_{n_i}^i), \end{aligned}$$

avec $m_i = a_1^i < a_2^i < \cdots < a_{n_i}^i$ et $h_j^i \in \{\delta_{j,1}, 2\}$ pour $1 \leq j \leq n_i$. Nous supposons aussi que

$$\min A_1 = m_1 < \min A_2 = m_2 < \cdots < \min A_k = m_k.$$

Nous identifions chaque sp-intervalle $I_m(a, h)$ par son minimum a. Alors nous considérons l'ensemble

$$S = \{a_j^i \mid 1 \leq i \leq k \text{ et } 1 \leq j \leq n_i\}$$

des minima de tous les sp-intervalles dans $\mathcal{P}$. Puis, nous définissons la suite croissante

$$(b_l)_{1\leq l\leq m}$$

des éléments de cet ensemble S, où $m = \sum_{i=1}^{k} n_i$, c'est-à-dire, nous avons :

$$\begin{aligned}
[n] &= \bigcup_{i=1}^{k}\bigcup_{j=1}^{n_i} I_{m_i}(a_j^i, h_j^i),\\
\{b_1, \ldots, b_m\} &= \{a_1^1, \ldots, a_{n_1}^1, a_1^2, \ldots, a_{n_2}^2, \ldots, a_1^n, \ldots, a_{n_k}^k\},\\
&= \{a_j^i \mid 1 \leq i \leq k \text{ et } 1 \leq j \leq n_i\},\\
b_1 < b_2 &< \cdots < b_m.
\end{aligned}$$

En attribuant la couleur i à tous les éléments de A_i, nous définissons un k-coloriage

$$\begin{aligned}
\chi : [n] &\longrightarrow [k]\\
x &\longmapsto \chi(x) = i \text{ si } x \in A_i.
\end{aligned}$$

Nous considérons la suite de couleur

$$(\chi(b_l))_{1\leq l\leq m}$$

avec $\chi(b_l) \in [k]$ pour $1 \leq l \leq m$. Nous sommes maintenant prêts à introduire le mot associé à la partition $\mathcal{P}$:

Définition 60. *Le mot $w(\mathcal{P})$ associé à la k-partition spéciale $\mathcal{P}$ est défini par*

$$w(\mathcal{P}) = \chi(b_1)\chi(b_2)\cdots\chi(b_m).$$

Ainsi $w(\mathcal{P}) \in [k]^*$ et $|w(\mathcal{P})| = m = \sum_{i=1}^{k} n_i$.

Dans l'Exemple 43, nous avons une 4-partition spéciale $\mathcal{P}'$ de [66],

$$\begin{aligned}
A_1 &= I_1(1,2) \cup I_1(8,0) \cup I_1(11,0) \cup I_1(22,0) \cup I_1(25,0) \cup I_1(50,0) \cup I_1(63,0)\\
A_2 &= I_3(3,1) \cup I_3(19,2) \cup I_3(51,0) \cup I_3(64,0)\\
A_3 &= I_9(9,2) \cup I_9(54,0)\\
A_4 &= I_{24}(24,1).
\end{aligned}$$

alors le mot $w(\mathcal{P}') \in [4]^*$ associé à $\mathcal{P}'$ est

$$w(\mathcal{P}') = 12131214112312.$$

Par définition, la contraction de $w(\mathcal{P}')$ sur $[2, 4]$ est

$$\rho_{[1]}(\mathcal{P}') = 2324232.$$

Remarquons que le palindrome $s(2, 4)$ est égal à 2324232, donc

$$\rho_{[1]}(\mathcal{P}') = s(2, 4).$$

3.5 Partition contrainte

Maintenant, nous proposons de faire le processus inverse. Nous introduisons une nouvelle définition sur les partitions liées à un palindrome $s(a, n)$ donné.

Définition 61. *Soient $k, a \in \mathbb{N}$ avec $a \in [k]$. Une k-partition spéciale $\mathcal{P}$ est* contrainte par *le palindrome $s(a, k)$ si*

$$\rho_{[a-1]}(w(\mathcal{P})) \leq s(a, k).$$

Nous utilisons un algorithme spécifique pour rechercher les k-partitions spéciales contraintes par $s(a, k)$.

4 Algorithmes de recherche de partitions

Dans cette section, nous donnons deux méthodes de recherche de partitions. La première consiste à trouver des k-partitions spéciales de $[n]$. La seconde cherche seulement des k-partitions spéciales contraintes par $s(a, k)$, pour un $a \in [k]$ donné.

4.1 Recouvrements et partitions

Fixons un entier $k \geq 1$. Soit n un entier positif. Rappelons que

$$\{A_1, \ldots, A_k\},$$

avec $A_i \subseteq \mathbb{N}$ pour $1 \leq i \leq k$, est un *recouvrement* $\mathcal{C}$ de $[n]$ si

$$[n] \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_k.$$

Remarquons que pour tout recouvrement $\mathcal{C}$, nous pouvons extraire une partition $\mathcal{P}$ en supprimant les éléments dupliqués, par exemple comme suit :

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1 \cap [n], \\ B_i &= (A_i \cap [n]) \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j \quad \text{pour } 2 \leq i \leq k. \end{aligned}$$

Dans cette section, nous cherchons des recouvrements et ensuite nous obtenons des partitions correspondantes par les formules ci-dessus.

Soient $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ deux partitions (*resp.* recouvrements). Nous notons :

$$\mathcal{P}_1 \preceq \mathcal{P}_2 \text{ si } \forall A \in \mathcal{P}_1, \exists B \in \mathcal{P}_2 \text{ tel que } A \subseteq B.$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Une *k-partition spéciale extremum* $\mathcal{P}_1$ est une k-partition spéciale telle que s'il existe une k-partition spéciale $\mathcal{P}_2$ avec $\mathcal{P}_1 \preceq \mathcal{P}_2$ alors nous avons $\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_1$.

Rappelons qu'une k-partition (*resp.* un k-recouvrement) spéciale $\mathcal{P}$ de $[n]$ est de la forme

$$\mathcal{P} = \{A_1, \ldots, A_k\}$$

telle que pour $1 \leq i \leq k$ nous avons

$$A_i = I_{m_i}(a_1^i, h_1^i) \cup I_{m_i}(a_2^i, h_2^i) \cup \cdots \cup I_{m_i}(a_{n_i}^i, h_{n_i}^i)$$

avec $m_i = a_1^i < a_2^i < \cdots < a_{n_i}^i$ et $a_{j+1}^i > \max I_{m_i}(a_j^i, h_j^i)$ pour $1 \leq j < n_i$. Puisque d'après l'Affirmation 49, c'est une condition pour être faiblement libre de somme. Nous supposons aussi que

$$\min A_1 = m_1 = 1 < \min A_2 = m_2 < \cdots < \min A_k = m_k.$$

Nous avons vu que nous pouvons écrire $I_m(a, h) = \langle a, h \rangle$ où l'index m est le minimum de la partie. Ainsi, avec l'ordinateur, nous optimisons la mémoire parce que le programme informatique correspondant à notre algorithme utilise seulement deux entiers a, h pour définir l'entrée $\langle a, h \rangle$, même si

$$\mathrm{Card}(\langle a, h \rangle) = m + \delta_{m,a}$$

pour tout $m \geq 2$.

4.2 Initialisation

Nous introduisons quelques définitions relatives aux partitions en k parties faiblement libres de sommes.

Définition 62. *Soit k un entier positif. Nous définissons le nombre $K(k)$ comme le plus grand entier* connu à ce jour *tel qu'il existe une k-partition de $[K(k)]$ en k parties faiblement libres de sommes.*

Maintenant, nous nous tournons vers les partitions spéciales.

Définition 63. *Soit un entier positif k. Nous définissons le nombre $K_{sp}(k)$ comme le plus grand entier* connu à ce jour *tel qu'il existe une k-partition spéciale (ou k-recouvrement spécial) de $[K_{sp}(k)]$.*

Par ces définitions, pour tout entier positif k, nous avons :

$$\begin{array}{lllll} K_{sp}(k) & \leq & K(k) & \leq & WS(k) \\ K_{sp}(k) & \leq & N(k) & \leq & WS(k). \end{array}$$

Fixons $k \in \mathbb{N}^*$. Soit un entier $r(k) \geq 0$. Nous construisons un $k+1$-recouvrement spécial $\mathcal{P}_{k+1}$ de $[n]$, en complétant un k-recouvrement spécial $\mathcal{P}_k$ de $[n']$ tel que

$$K_{sp}(k) - r(k) \leq n' \leq K_{sp}(k).$$

En d'autres termes, nous initialisons notre recherche de $k+1$-recouvrements spéciaux de $[n]$ à partir de tous les k-recouvrements spéciaux $\mathcal{P}_k$ connus de $[n']$, avec

$$n' \in [K_{sp}(k) - r(k), K_{sp}(k)].$$

Le choix de $r(k)$ est important, car un $k+1$-recouvrement spécial de $[K_{sp}(k+1)]$ n'est pas nécessairement une extension d'un k-recouvrement spécial de $[K_{sp}(k)]$. Par exemple, pour $k = 5$, nous avons $K_{sp}(5) = 196$. Tous les 6-recouvrements spéciaux de $[n]$ qui sont des extensions des 5-recouvrements spéciaux de [196] satisfont

$$n \leq 575.$$

Cependant, les 6-recouvrements de [582] sont obtenus par extensions des 5-recouvrements spéciaux de [195]. Cela montre que nous avons besoin de prendre $r(5) \geq 1$ dans notre algorithme de recherche pour obtenir le meilleur minorant de $WS(6)$.

Si nous choisissons

$$r(i) = K_{sp}(i), \text{ pour } 1 \leq i \leq k,$$

nous obtiendrons tous les $k+1$-recouvrements spéciaux, dans ce cas, nous disons que nous initialisons la recherche avec le recouvrement vide. Pour $2 \leq k \leq 5$, pour obtenir tous les k-recouvrements spéciaux, nous avons choisi

$$r(k-1) = K_{sp}(k-1).$$

Nous remarquons que si $\mathcal{P}_{k+1} = \{A_1, \ldots, A_{k+1}\}$ avec

$$\min A_1 < \min A_2 < \cdots < \min A_{k+1},$$

alors pour $1 \leq i \leq k$ nous avons

$$r(i) \geq K_{sp}(i) - \min A_{i+1} + 1. \tag{4.1}$$

À posteriori, pour $6 \leq k \leq 9$, pour avoir les meilleurs k-recouvrements, utilisant l'Inégalité (4.1), il aurait suffi de prendre

$$r(5) = 1,\ r(6) = 2,\ r(7) = 5,\ r(8) = 2.$$

Nous avons exploré jusqu'à

$$r(5) = 11,\ r(6) = 12,\ r(7) = 15,\ r(8) = 12,$$

mais aucune amélioration n'apparaît.

4.3 Algorithme de recherche de partitions spéciales

Dans cet algorithme, nous cherchons des k-recouvrements spéciaux (sans contraintes supplémentaires). Soient $k, n \in \mathbb{N}^*$, et supposons que nous avons un k-recouvrement spécial $\mathcal{C}$ de $[n]$ obtenu préalablement, nous allons donner un algorithme qui cherche les k-recouvrements spéciaux contenant $\mathcal{C}$.

`Début:` Soit $\mathcal{C}$ un k-recouvrement spécial de $[n]$ en k parties $A_1, \ldots, A_k$. Pour $i = 1, \ldots, k$, nous avons :

$$\begin{aligned} A_i &= I_{m_i}(a_1^i, h_1^i) \cup I_{m_i}(a_2^i, h_2^i) \cup \cdots \cup I_{m_i}(a_{n_i}^i, h_{n_i}^i) \\ &= \langle a_1^i, h_1^i \rangle \langle a_2^i, h_2^i \rangle \cdots \langle a_{n_i}^i, h_{n_i}^i \rangle \end{aligned}$$

avec $a_1^i = m_i < a_2^i < \ldots < a_{n_i}^i$(car $a_{j+1}^i > \max I_{m_i}(a_j^i, h_j^i)$), et $h_j^i \in \{\delta_{1,j}, 2\}$ pour tout i, j. Supposons que n est l'entier tel que

$$[n] \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} A_i,$$

et

$$n+1 \notin \bigcup_{i=1}^{k} A_i.$$

En d'autres termes, n est le plus grand entier (qui dépend de $\mathcal{C}$) tel que $[n]$ est couvert par $\mathcal{C}$ et donc $n+1$ est le plus petit trou positif de $\mathcal{C}$ que nous essaierons de combler pour former un autre recouvrement contenant $\mathcal{C}$.

Pour chaque $r \in [k]$ et $h(r) \in \{\delta_{A_r,\emptyset}, 2\}$, nous considérons le recouvrement

$$\mathcal{C}^{(r,h(r))} = \{A_i^{(r,h(r))} \mid 1 \leq i \leq k\}$$

tel que pour $1 \leq i \leq k$:

$$A_i^{(r,h(r))} = \begin{cases} A_i & \text{si } i \neq r, \\ A_r \cup I_{m_r}(n+1, h(r)) & \text{si } i = r, \end{cases}$$

où $m_r = n+1$ si $A_r = \emptyset$. Nous avons

$$|\{\mathcal{C}^{(r,h(r))} \mid (r, h(r)) \in [k] \times \{\delta_{A_r,\emptyset}, 2\}\}| = 2k.$$

Puisque $n+1 \in A_r^{(r,h(r))}$, il existe $n^{(r,h(r))} \geq n+1$, le plus grand entier, qui dépend de $\mathcal{C}^{(r,h(r))}$, tel que

$$[n^{(r,h(r))}] \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} A_i^{(r,h(r))}.$$

Par construction, $A_i^{(r,h(r))} = A_i$ est faiblement libre de somme pour $i \neq r$. Alors le recouvrement $\mathcal{C}^{(r,h(r))}$ est un k-recouvrement spécial de $[n^{(r,h(r))}]$ si et seulement si $A_r^{(r,h(r))}$ est faiblement libre de somme. En appliquant l'Affirmation 57, nous déterminons si $A_r^{(r,h(r))}$ est faiblement libre de somme. Mais, nous avons supposé que A_r est faiblement libre de somme (s'il n'est pas vide), c'est-à-dire, pour $1 \leq i \leq j \leq q \leq n_r$

$$(I_{m_r}(a_i^r, h_i^r) \dot{+} I_{m_r}(a_j^r, h_j^r)) \cap I_{m_r}(a_q^r, h_q^r) = \emptyset.$$

Donc, $A_r^{(r,h(r))} = A_r \cup I_{m_r}(n+1, h(r))$ est faiblement libre de somme si et seulement si, pour $1 \leq i \leq j \leq n_r + 1$ nous avons

$$(I_{m_r}(a_i^r, h_i^r) \dot{+} I_{m_r}(a_j^r, h_j^r)) \cap I_{m_r}(n+1, h(r)) = \emptyset,$$

où $a_{n_r+1}^r = n+1$ et $h_{n_r+1}^r = h(r)$. Soit

$$L_w = \{(r, h(r)) \in [k] \times \{\delta_{A_r,\emptyset}, 2\} \mid A_r^{(r,h(r))} \text{ faiblement libre de somme}\}.$$

CAS 1 : Si $L_w \neq \emptyset$. Nous avons

$$L_w = \{(r_1, h(r_1)), (r_2, h(r_2)), \dots, (r_{|L_w|}, h(r_{|L_w|}))\}.$$

Nous obtenons $|L_w|$ nouveaux k-recouvrements spéciaux

$$\mathcal{C}^{(r_1,h(r_1))}, \cdots, \mathcal{C}^{(r_{|L_w|},h(r_{|L_w|}))} \in \{\mathcal{C}^{(r,h(r))} \mid (r, h(r)) \in [k] \times \{\delta_{A_r,\emptyset}, 2\}\}$$

tels que pour $i = 1, \dots, |L_w|$ nous avons :

(a) $\mathcal{C} \preceq \mathcal{C}^{(r_i,h(r_i))}$,

(b) $A_1^{(r_i,h(r_i))}, A_2^{(r_i,h(r_i))}, \dots, A_k^{(r_i,h(r_i))}$ sont faiblement libres de sommes.

Nous revenons au `Début` avec le k-recouvrement spécial $\mathcal{C} = \mathcal{C}^{(r_i,h(r_i))}$ de $[n]$, $n = n^{(r_i,h(r_i))}$, pour $1 \leq i \leq |L_w|$.

CAS 2 : Si $L_w = \emptyset$. Alors le k-recouvrement $\mathcal{C}$ est extremum. Et nous `arrêtons` la recherche de k-recouvrement contenant $\mathcal{C}$.

Remarque 64. *Si à l'initialisation, le recouvrement de départ est vide, cette méthode répertorie tous les k-recouvrements.*

4.4 Algorithme de recherche de k-partitions spéciales contraintes par le palindrome $s(a, k)$

Nous présentons maintenant notre méthode pour construire un k-recouvrement spécial $\mathcal{P}$ dont le mot correspondant $w(\mathcal{P})$ est un facteur à gauche d'un palindrome donné sur $s(a, k)$ avec $a \in [2, k-1]$.

Soient $k, n \in \mathbb{N}^*$. De même que la méthode précédente, nous supposons que nous avons un k-recouvrement $\mathcal{C}$ spécial de $[n]$ dont le mot correspondant est un facteur à gauche sur $s(a, k)$, $a \in [k-1]$. Nous allons chercher les k-recouvrements vérifiant les mêmes propriétés et contenant $\mathcal{C}$.

`Début`: Soit $\mathcal{C}$ un k-recouvrement spécial de $[n]$ en k parties $A_1, \dots, A_k$ et contraint par $s(a, k)$. En d'autres termes, nous avons

$$\rho_{[a-1]}(w(\mathcal{C})) \leq s(a, k).$$

Pour $1 \leq i \leq k$ nous avons

$$A_i = I_{m_i}(a_1^i, h_1^i) \cup I_{m_i}(a_2^i, h_2^i) \cup \cdots \cup I_{m_i}(a_{n_i}^i, h_{n_i}^i)$$

avec $a_1^i = m_i < a_2^i < \ldots < a_{n_i}^i$, et $h_j^i \in \{\delta_{1,j}, 2\}$ pour tout i, j.

Supposons que n est l'entier le plus grand tel que

$$[n] \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} A_i,$$

et alors

$$n + 1 \notin \bigcup_{i=1}^{k} A_i.$$

Comme dans la méthode précédente, nous essaierons de combler ce plus petit trou $n+1$ de $\mathcal{C}$ pour construire un autre recouvrement contenant $\mathcal{C}$.

Rappelons que le mot $w(\mathcal{C})$, qui correspond à $\mathcal{C}$, est défini par

$$w(\mathcal{C}) = \chi(b_1)\chi(b_2)\dots\chi(b_m),$$

où $m = \sum_{i=1}^{k} n_i$ et

$$\{b_i \mid 1 \le i \le m\} = \{a_j^i \mid 1 \le i \le k,\ 1 \le j \le n_i\}$$

tels que

$$b_1 < b_2 < \cdots < b_m.$$

Nous avons supposé que :

$$\rho_{[a-1]}(w(\mathcal{C})) \le s(a,k) = c_{(1)}c_{(2)}\dots c_{(2^{k-a+1}-1)},$$

c'est-à-dire, il existe $l \le 2^{k-a+1}-1$ tel que

$$\begin{aligned} \rho_{[a-1]}(w(\mathcal{C})) &= c_{(1)}c_{(2)}\dots c_{(l)}, \\ l &= |\rho_{[a-1]}(w(\mathcal{C}))|. \end{aligned}$$

Selon la longueur l de $\rho_{[a-1]}(w(\mathcal{C}))$, nous définissons l'entier

$$f(l) = \begin{cases} c_{(l+1)} & \text{si } l < 2^{k-a+1}-1, \\ a-1 & \text{si } l = 2^{k-a+1}-1. \end{cases}$$

Pour $r \in [a-1] \cup \{f(l)\}$ et $h(r) \in \{\delta_{A_r,\emptyset}, 2\}$, nous considérons le recouvrement

$$\mathcal{C}^{(k,h(k))} = \{A_i^{(k,h(k))} \mid 1 \le i \le n\}$$

tel que pour $1 \le i \le k$:

$$A_i^{(r,h(r))} = \begin{cases} A_i & \text{si } i \ne r, \\ A_r \cup I_{m_r}(n+1, h(r)) & \text{si } i = r, \end{cases}$$

où $m_r = n+1$ si $A_r = \emptyset$. Nous avons

$$\begin{aligned} \left|\left\{\mathcal{C}^{(r,h(r))} \mid (r,h(r)) \in ([a-1] \cup \{f(l)\}) \times \{\delta_{A_r,\emptyset}, 2\}\right\}\right| &= \begin{cases} 2a & \text{si } l < 2^{k-a+1}-1 \\ 2(a-1) & \text{si } l = 2^{k-a+1}-1 \end{cases} \\ &= 2(a - \delta_{l,2^{k-a+1}-1}). \end{aligned}$$

Puisque $n+1 \in A_k^{(r,h(r))}$, il existe $n^{(r,h(r))} \ge n+1$ le plus grand entier, qui dépend de $\mathcal{C}^{(r,h(r))}$, tel que

$$[n^{(r,h(r))}] \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} A_i^{(r,h(r))}.$$

Par construction, $r \in [a-1] \cup \{f(l)\}$ avec $f(l) = c_{(l+1)} \ge a$ ou $f(l) = a-1$, c'est-à-dire, $r = c_{(l+1)}$ ou $r < a$. Nous avons

$$\chi(n+1) = \chi(a_{n_r+1}^r) = r$$

et

$$w(\mathcal{C}^{(r,h(r))}) = w(\mathcal{C})\chi(n+1) = w(\mathcal{C})r.$$

Comme

$$\rho_{[a-1]}(w(\mathcal{C})) = c_{(1)}c_{(2)}\ldots c_{(l)} \leq s(a,k),$$

alors

$$\begin{aligned}\rho_{[a-1]}(w(\mathcal{C}^{(r,h(r))})) &= \rho_{[a-1]}(w(\mathcal{C}))\lambda_{[a-1]}(r) \\ &= \begin{cases} c_{(1)}c_{(2)}\ldots c_{(l)} & \text{si } r < a, \\ c_{(1)}c_{(2)}\ldots c_{(l)}c_{(l+1)} & \text{si } r \geq a. \end{cases}\end{aligned}$$

Donc

$$\rho_{[a-1]}(w(\mathcal{C}^{(r,h(r))})) \leq s(a,k).$$

Par hypothèse, $A_i^{(r,h(r))} = A_i$ est faiblement libre de somme pour $i \neq r$. Alors le k-recouvrement $\mathcal{C}^{(r,h(r))}$ est un k-recouvrement spécial de $[n^{(r,h(r))}]$ si et seulement si $A_r^{(r,h(r))}$ est faiblement libre de somme. Comme dans la méthode précédente, l'ensemble $A_r^{(r,h(r))} = A_r \cup I_{m_r}(n+1, h(r))$ est libre de somme si et seulement si pour $1 \leq i \leq j \leq n_r + 1$ nous avons

$$(I_{m_r}(a_i^r, h_i^r)\dot{+}I_{m_r}(a_j^r, h_j^r)) \cap I_{m_r}(n+1, h(r)) = \emptyset,$$

où $a_{n_r+1}^r = n+1$ et $h_{n_r+1}^r = h(r)$. Soit

$$L_w = \{(r, h(r)) \in ([a-1] \cup \{f(l)\}) \times \{\delta_{A_r,\emptyset}, 2\} \mid A_r^{(r,h_{(r)})} \text{ faiblement libre de somme}\}.$$

Ici, nous réduisons le domaine de recherche de recouvrements, car

$$|L_w| \leq 2(a - \delta_{l,2^{k-a+1}-1}) \leq 2a.$$

CAS 1 : Si $L_w \neq \emptyset$. Nous avons

$$L_w = \{(r_1, h(r_1)), (r_2, h(r_2)), \ldots, (r_{|L_w|}, h(r_{|l_w|}))\}.$$

Alors nous obtenons $|L_w|$ nouveaux k-recouvrements spéciaux

$$\mathcal{C}^{(r_1,h(r_1))}, \cdots, \mathcal{C}^{(r_{|L_w|},h(r_{|L_w|}))} \in \{\mathcal{C}^{(r,h(r))} \mid (r, h(r)) \in ([a-1] \cup \{f(l)\}) \times \{\delta_{A_r,\emptyset}, 2\}\}$$

tels que pour $i = 1, \ldots, |L_w|$ nous avons :

(a) $\mathcal{C} \preceq \mathcal{C}^{(r_i,h(r_i))}$,

(b) $A_1^{(r_i,h(r_i))}, A_2^{(r_i,h(r_i))}, \ldots, A_k^{(r_i,h(r_i))}$ sont faiblement libres de sommes,

(c) $\rho_{[a-1]}(w(\mathcal{C}^{(r_i,h(r_i))})) \leq s(a,k)$.

Nous revenons au `Début` avec le k-recouvrement spécial $\mathcal{C} = \mathcal{C}^{(r_i,h(r_i))}$ de $[n]$, $n = n^{(r_i,h(r_i))}$, pour $1 \leq i \leq |L_w|$.

CAS 2 : Si $L_w = \emptyset$. Alors le k-recouvrement $\mathcal{C}$ est extremum sur les k-recouvrements contraint par le palindrome $s(a,k)$. Et nous `arrêtons` la recherche de k-recouvrement contenant $\mathcal{C}$ avec la contrainte $s(a,k)$.

5 Meilleures partitions obtenues

Dans cette section, nous allons donner les partitions que nous avons trouvées en appliquant les méthodes de recherches précédentes. Nous remarquons que pour $1 \leq k \leq 9$ nous avons

$$K(k) = K_{sp}(k) \leq N(k).$$

Nous présentons les résultats avec la Notation 47. Pour $k = 5$ et 6, nous avons utilisé la première méthode de recherche 4.3 pour retrouver les meilleurs minorants de $WS(5)$ et $WS(6)$ dans [5] et [6] respectivement. Pour $k = 7, 8$ et 9, nous avons appliqué le second algorithme de recherche 4.4 avec la contrainte $s(2, k)$ pour obtenir les meilleurs minorants, jusqu'à ce jour, sur $WS(k)$, $7 \leq k \leq 9$ à savoir :

$$WS(7) \geq 1740, \quad WS(8) \geq 5201, \quad WS(9) \geq 15596.$$

Nous donnons les liens vers les fichiers contenant toutes les meilleures n-partitions spéciales que nous avons trouvées pour $5 \leq n \leq 9$ dans deux formats différents dans [16] et [17].

5.1 5 et 6-coloriages

Les minorants

$$WS(5) \geq 196 \text{ et } WS(6) \geq 582$$

ont été obtenus dans [5] et [6], respectivement. Même si nous ne les avons pas améliorés, nous avons trouvé des partitions spéciales de [196] et [582] en 5 et 6 parties, respectivement, utilisant le premier algorithme 4.3.

Pour $k = 5$, nous avons initialisé la recherche à partir de la partition vide. Nous avons enregistré

$$913337131$$

5-recouvrements spéciaux extremums. Une recherche exhaustive a révélé qu'il n'existe pas de recouvrement de [197] en 5 parties qui sont des ensembles spéciaux faiblement libres de sommes, et nous avons trois 5-recouvrements spéciaux de [196] d'où

$$N(5) = 196.$$

Le programme C ++ correspondant à l'algorithme a pris 26 heures pour obtenir tous les résultats, en utilisant un cœur d'un processeur i7-2,6 Ghz, d'un ordinateur portable. La taille du fichier contenant tous les 5-recouvrements spéciaux extremums dépasse 190 Go.

Proposition 65. *Nous avons* $WS(5) \geq N(5) = 196$.

Démonstration. Ici, nous montrons que $WS(5) \geq 196$ en donnant une 5-partition spéciale de [196] :

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{1, 2, 4, 8, 11, 22, 25, 53, 63, 69, 135, 140, 150, 155, 178, 183, 196\} \\
A_2 &= \langle 3, 1\rangle\langle 19, 2\rangle\langle 50, 0\rangle\langle 64, 0\rangle\langle 137, 0\rangle\langle 151, 0\rangle\langle 180, 0\rangle\langle 193, 0\rangle \\
A_3 &= \langle 9, 2\rangle\langle 54, 0\rangle\langle 141, 0\rangle\langle 184, 0\rangle \\
A_4 &= \langle 24, 1\rangle\langle 154, 2\rangle \\
A_5 &= \langle 67, 2\rangle.
\end{aligned}$$

$\square$

Comme nous l'avons dit plus haut, nous avons trouvé trois 5-partitions spéciales de [196] ([16], [17]). L'une d'elles a déjà été donnée dans [5]. Il reste un problème ouvert de montrer que $WS(5) = 196$.

Nous passons maintenant aux 6-coloriages. En 2012, les auteurs de [5] ont montré que

$$WS(6) \geq 572,$$

et puis en 2013, une amélioration de ce minorant de $WS(6)$ est donné dans [6]. Tel est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 66. *Nous avons* $WS(6) \geq 582$.

Démonstration. Il suffit de donner une 6-partition spéciale de [582].

$$A_1 = \left[\begin{array}{l}\{1, 2, 4, 8, 11, 22, 25, 53, 63, 68, 136, 149, 154, 177, 182, 192, 198, 393, 407, 412, 435, 440, 450, 455,\\ 521, 526, 536, 541, 564, 569, 582\}\end{array}\right.$$

$$A_2 = \left[\begin{array}{l}\langle 3, 1\rangle\langle 19, 2\rangle\langle 50, 0\rangle\langle 64, 0\rangle\langle 137, 0\rangle\langle 150, 0\rangle\langle 179, 0\rangle\langle 193, 0\rangle\langle 395, 0\rangle\langle 408, 0\rangle\langle 437, 0\rangle\langle 451, 0\rangle\langle 523, 0\rangle\\ \langle 537, 0\rangle\langle 566, 0\rangle\langle 579, 0\rangle\end{array}\right.$$

$$A_3 = \langle 9, 2\rangle\langle 54, 0\rangle\langle 140, 0\rangle\langle 183, 0\rangle\langle 398, 0\rangle\langle 441, 0\rangle\langle 527, 0\rangle\langle 570, 0\rangle$$

$$A_4 = \langle 24, 1\rangle\langle 153, 2\rangle\langle 411, 2\rangle\langle 540, 2\rangle$$

$$A_5 = \langle 67, 1\rangle\langle 454, 2\rangle$$

$$A_6 = \langle 196, 2\rangle.$$

□

Nous avons trouvé treize 6-partitions spéciales de [582] ([16], [17]). Nous observons que la 6-partition établissant $WS(6) \geq 582$ donnée dans [6] n'est pas composée d'ensembles spéciaux. Par exemple, sa sixième partie est

$$B_6 = [196, 392] \setminus \{197, 252, 292, 304, 342, 368, 370\}$$

qui *n'est pas* un ensemble spécial, alors que notre sixième partie est l'ensemble spécial

$$A_6 = \langle 196, 2\rangle = [196, 394] \setminus \{198, 393\}.$$

Remarque 67. *Pour* $r \leq 6$*, le mot correspondant à une* r*-partition spéciale* $\mathcal{P}_r$ *de* $[1, K(r)]$ *que nous avons trouvée vérifie :*

$$\rho_{[1]}(w(\mathcal{P}_r)) = s(2, r).$$

Dans les résultats suivants, nous avons utilisé l'algorithme de recherche 4.4 utilisant comme contrainte le palindrome $s(2, k)$ pour restreindre le champ de recherche.

5.2 7-coloriages

Le meilleur minorant connu actuellement publié est

$$WS(7) \geq S(7) \geq 1680$$

établi par Fredricksen et Sweet dans [8]. Ici nous améliorons ce minorant comme suit.

Proposition 68. *Nous avons* $WS(7) \geq 1740$.

Démonstration. Il suffit de donner une 7-partition spéciale de [1740] :

$$A_1 = \left[\begin{array}{l}\{1, 2, 4, 8, 11, 22, 25, 50, 63, 68, 136, 149, 154, 177, 182, 192, 197, 397, 407, 412, 435, 440, 450, 455,\\ 521, 526, 536, 541, 564, 569, 582, 585, 1170, 1180, 1185, 1208, 1213, 1223, 1228, 1294, 1299, 1309, 1314,\\ 1337, 1351, 1356, 1551, 1565, 1570, 1593, 1598, 1608, 1613, 1679, 1684, 1694, 1699, 1722, 1727, 1737\}\end{array}\right.$$
$$A_2 = \left[\begin{array}{l}\langle 3,1\rangle\langle 19,2\rangle\langle 51,0\rangle\langle 64,0\rangle\langle 137,0\rangle\langle 150,0\rangle\langle 179,0\rangle\langle 193,0\rangle\langle 394,0\rangle\langle 408,0\rangle\langle 437,0\rangle\langle 451,0\rangle\langle 523,0\rangle\\ \langle 537,0\rangle\langle 566,0\rangle\langle 579,0\rangle\langle 1167,0\rangle\langle 1181,0\rangle\langle 1210,0\rangle\langle 1224,0\rangle\langle 1296,0\rangle\langle 1310,0\rangle\langle 1339,0\rangle\langle 1352,0\rangle\\ \langle 1553,0\rangle\langle 1566,0\rangle\langle 1595,0\rangle\langle 1609,0\rangle\langle 1681,0\rangle\langle 1695,0\rangle\langle 1724,0\rangle\langle 1738,0\rangle\end{array}\right.$$
$$A_3 = \left[\begin{array}{l}\langle 9,2\rangle\langle 54,0\rangle\langle 140,0\rangle\langle 183,0\rangle\langle 398,0\rangle\langle 441,0\rangle\langle 527,0\rangle\langle 570,0\rangle\langle 1171,0\rangle\langle 1214,0\rangle\langle 1300,0\rangle\langle 1342,0\rangle\\ \langle 1556,0\rangle\langle 1599,0\rangle\langle 1685,0\rangle\langle 1728,0\rangle\end{array}\right.$$
$$A_4 = \langle 24,1\rangle\langle 153,2\rangle\langle 411,2\rangle\langle 540,2\rangle\langle 1184,2\rangle\langle 1313,2\rangle\langle 1569,2\rangle\langle 1698,2\rangle$$
$$A_5 = \langle 67,1\rangle\langle 454,2\rangle\langle 1227,2\rangle\langle 1612,2\rangle$$
$$A_6 = \langle 196,1\rangle\langle 1355,2\rangle$$
$$A_7 = \langle 583,2\rangle.$$

□

Remarquons que nous avons trouvé quatre 7-partitions spéciales différentes de [1740] (voir [16], [17]). Nous constatons que ces quatre 7-partitions spéciales $\mathcal{P}_i$, $1 \leq i \leq 4$, de [1740] vérifient aussi

$$\rho_{[1]}(w(\mathcal{P}_i)) = s(2,7), \quad \text{pour} \quad i \in [1,4].$$

Nous remarquons également que nous obtenons ces 7-partitions spéciales de [1740] à partir des 6-partitions spéciales de [582], obtenues précédemment.

5.3 8-coloriages

Le meilleur minorant jusqu'à présent sur $WS(8)$ est celui sur $S(8)$ obtenu en utilisant l'inégalité de Schur dans le Lemme 10 du Chapitre 1, nous avons

$$\begin{aligned} WS(8) \geq S(8) &\geq 3 \cdot S(7) + 1 \\ &\geq 3 \cdot (1680) + 1 \\ &\geq 5041. \end{aligned}$$

Ici nous améliorons cet encadrement.

Proposition 69. *Nous avons* $WS(8) \geq 5201$.

Démonstration. Voici une 8-partition spéciale de [5201].

$$A_1 = \left[\begin{array}{l}
\{1, 2, 4, 8, 11, 22, 25, 50, 63, 68, 139, 149, 154, 177, 182, 192, 197, 397, 407, 412, 435, 440, 453, 524, 534, 539,\\
562, 567, 577, 582, 1167, 1177, 1182, 1205, 1210, 1223, 1294, 1304, 1309, 1332, 1337, 1347, 1352, 1547, 1552,\\
1562, 1567, 1590, 1595, 1605, 1679, 1689, 1694, 1717, 1722, 1732, 1738, 3473, 3478, 3488, 3493, 3516, 3521,\\
3534, 3605, 3615, 3620, 3643, 3648, 3658, 3663, 3858, 3863, 3873, 3878, 3901, 3906, 3916, 3990, 4000, 4005,\\
4028, 4033, 4043, 4048, 4628, 4633, 4643, 4648, 4671, 4676, 4686, 4760, 4770, 4775, 4798, 4803, 4813, 4818,\\
5013, 5018, 5028, 5033, 5056, 5061, 5071, 5145, 5155, 5160, 5183, 5188, 5198\}
\end{array}\right.$$

$$A_2 = \left[\begin{array}{l}
\langle 3,1\rangle\langle 19,2\rangle\langle 51,0\rangle\langle 64,0\rangle\langle 136,0\rangle\langle 150,0\rangle\langle 179,0\rangle\langle 193,0\rangle\langle 394,0\rangle\langle 408,0\rangle\langle 437,0\rangle\langle 450,0\rangle\langle 521,0\rangle\\
\langle 535,0\rangle\langle 564,0\rangle\langle 578,0\rangle\langle 1164,0\rangle\langle 1178,0\rangle\langle 1207,0\rangle\langle 1220,0\rangle\langle 1291,0\rangle\langle 1305,0\rangle\langle 1334,0\rangle\langle 1348,0\rangle\\
\langle 1549,0\rangle\langle 1563,0\rangle\langle 1592,0\rangle\langle 1606,0\rangle\langle 1676,0\rangle\langle 1690,0\rangle\langle 1719,0\rangle\langle 1733,0\rangle\langle 3475,0\rangle\langle 3489,0\rangle\langle 3518,0\rangle\\
\langle 3531,0\rangle\langle 3602,0\rangle\langle 3616,0\rangle\langle 3645,0\rangle\langle 3659,0\rangle\langle 3860,0\rangle\langle 3874,0\rangle\langle 3903,0\rangle\langle 3917,0\rangle\langle 3987,0\rangle\langle 4001,0\rangle\\
\langle 4030,0\rangle\langle 4044,0\rangle\langle 4630,0\rangle\langle 4644,0\rangle\langle 4673,0\rangle\langle 4687,0\rangle\langle 4757,0\rangle\langle 4771,0\rangle\langle 4800,0\rangle\langle 4814,0\rangle\langle 5015,0\rangle\\
\langle 5029,0\rangle\langle 5058,0\rangle\langle 5072,0\rangle\langle 5142,0\rangle\langle 5156,0\rangle\langle 5185,0\rangle\langle 5199,0\rangle
\end{array}\right.$$

$$A_3 = \left[\begin{array}{l}
\langle 9,2\rangle\langle 54,0\rangle\langle 140,0\rangle\langle 183,0\rangle\langle 398,0\rangle\langle 441,0\rangle\langle 525,0\rangle\langle 568,0\rangle\langle 1168,0\rangle\langle 1211,0\rangle\langle 1295,0\rangle\langle 1338,0\rangle\\
\langle 1553,0\rangle\langle 1596,0\rangle\langle 1680,0\rangle\langle 1723,0\rangle\langle 3479,0\rangle\langle 3522,0\rangle\langle 3606,0\rangle\langle 3649,0\rangle\langle 3864,0\rangle\langle 3907,0\rangle\langle 3991,0\rangle\\
\langle 4034,0\rangle\langle 4634,0\rangle\langle 4677,0\rangle\langle 4761,0\rangle\langle 4804,0\rangle\langle 5019,0\rangle\langle 5062,0\rangle\langle 5146,0\rangle\langle 5189,0\rangle
\end{array}\right.$$

$$A_4 = \left[\begin{array}{l}
\langle 24,1\rangle\langle 153,2\rangle\langle 411,2\rangle\langle 538,2\rangle\langle 1181,2\rangle\langle 1308,2\rangle\langle 1566,2\rangle\langle 1693,2\rangle\langle 3492,2\rangle\langle 3619,2\rangle\langle 3877,2\rangle\\
\langle 4004,2\rangle\langle 4647,2\rangle\langle 4774,2\rangle\langle 5032,2\rangle\langle 5159,2\rangle
\end{array}\right.$$

$$A_5 = \langle 67,1\rangle\langle 454,0\rangle\langle 1224,0\rangle\langle 1609,0\rangle\langle 3535,0\rangle\langle 3920,0\rangle\langle 4690,0\rangle\langle 5075,0\rangle$$
$$A_6 = \langle 196,1\rangle\langle 1351,2\rangle\langle 3662,2\rangle\langle 4817,2\rangle$$
$$A_7 = \langle 581,1\rangle\langle 4047,2\rangle$$
$$A_8 = \langle 1736,2\rangle.$$

□

Notre programme, en C++ correspondant à l'algorithme 4.4, a trouvé six 8-partitions spéciales $\mathcal{P}_i$, $1 \leq i \leq 6$, de [5201] (voir [16], [17]). Comme pour $r \leq 7$, nous avons aussi

$$\rho_{[1]}(w(\mathcal{P}_i)) = s(2,8), \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq 6.$$

Chaque partition contient une 7-partition spéciale de [1735] mais pas de [1740].

5.4 9-coloriages

Comme sur $WS(8)$, le meilleur minorant connu jusqu'à présent sur $WS(9)$ est celui donné par le Lemme de Schur sur $S(9)$, à savoir

$$\begin{aligned} WS(9) \geq S(9) &\geq 3 \cdot (5041) + 1 \\ &\geq 15124. \end{aligned}$$

La proposition suivante améliore ce minorant de $WS(9)$.

Proposition 70. *Nous avons* $WS(9) \geq 15596$.

Démonstration. Nous avons trouvé une 9-partition spéciale de [15596] ([16], [17]) :

$$A_1 = \left[\begin{array}{l}
\{1, 2, 4, 8, 11, 22, 25, 50, 63, 68, 139, 149, 154, 177, 182, 192, 197, 397, 407, 412, 435, 440, 453, 524, 534, 539,\\
562, 567, 577, 582, 1167, 1177, 1182, 1205, 1210, 1223, 1294, 1304, 1309, 1332, 1337, 1347, 1352, 1547, 1552,\\
1562, 1567, 1590, 1595, 1605, 1679, 1689, 1694, 1717, 1722, 1732, 1737, 3477, 3487, 3492, 3515, 3520, 3533,\\
3604, 3614, 3619, 3642, 3647, 3657, 3662, 3857, 3862, 3872, 3877, 3900, 3905, 3915, 3989, 3999, 4004, 4027,\\
4032, 4042, 4047, 4627, 4632, 4642, 4647, 4670, 4675, 4685, 4759, 4769, 4774, 4797, 4802, 4812, 4817, 5012,\\
5017, 5027, 5032, 5055, 5060, 5070, 5144, 5154, 5159, 5182, 5187, 5197, 5203, 10403, 10408, 10418, 10423,\\
10446, 10451, 10464, 10535, 10545, 10550, 10573, 10578, 10588, 10593, 10788, 10793, 10803, 10808, 10831,\\
10836, 10846, 10920, 10930, 10935, 10958, 10963, 10973, 10978, 11558, 11563, 11573, 11578, 11601, 11606,\\
11616, 11690, 11700, 11705, 11728, 11733, 11743, 11748, 11943, 11948, 11958, 11963, 11986, 11991, 12001,\\
12075, 12085, 12090, 12113, 12118, 12128, 12133, 13868, 13873, 13883, 13888, 13911, 13916, 13926, 14000,\\
14010, 14015, 14038, 14043, 14053, 14058, 14253, 14258, 14268, 14273, 14296, 14301, 14311, 14385, 14395,\\
14400, 14423, 14428, 14438, 14443, 15023, 15028, 15038, 15043, 15066, 15071, 15081, 15155, 15165, 15170,\\
15193, 15198, 15208, 15213, 15408, 15413, 15423, 15428, 15451, 15456, 15466, 15537, 15550, 15555, 15578,\\
15583, 15593\}
\end{array}\right.$$

$$A_2 = \left[\begin{array}{l}
\langle 3,1\rangle\langle 19,2\rangle\langle 51,0\rangle\langle 64,0\rangle\langle 136,0\rangle\langle 150,0\rangle\langle 179,0\rangle\langle 193,0\rangle\langle 394,0\rangle\langle 408,0\rangle\langle 437,0\rangle\langle 450,0\rangle\langle 521,0\rangle\\
\langle 535,0\rangle\langle 564,0\rangle\langle 578,0\rangle\langle 1164,0\rangle\langle 1178,0\rangle\langle 1207,0\rangle\langle 1220,0\rangle\langle 1291,0\rangle\langle 1305,0\rangle\langle 1334,0\rangle\langle 1348,0\rangle\\
\langle 1549,0\rangle\langle 1563,0\rangle\langle 1592,0\rangle\langle 1606,0\rangle\langle 1676,0\rangle\langle 1690,0\rangle\langle 1719,0\rangle\langle 1733,0\rangle\langle 3474,0\rangle\langle 3488,0\rangle\langle 3517,0\rangle\\
\langle 3530,0\rangle\langle 3601,0\rangle\langle 3615,0\rangle\langle 3644,0\rangle\langle 3658,0\rangle\langle 3859,0\rangle\langle 3873,0\rangle\langle 3902,0\rangle\langle 3916,0\rangle\langle 3986,0\rangle\langle 4000,0\rangle\\
\langle 4029,0\rangle\langle 4043,0\rangle\langle 4629,0\rangle\langle 4643,0\rangle\langle 4672,0\rangle\langle 4686,0\rangle\langle 4756,0\rangle\langle 4770,0\rangle\langle 4799,0\rangle\langle 4813,0\rangle\langle 5014,0\rangle\\
\langle 5028,0\rangle\langle 5057,0\rangle\langle 5071,0\rangle\langle 5141,0\rangle\langle 5155,0\rangle\langle 5184,0\rangle\langle 5198,0\rangle\langle 10405,0\rangle\langle 10419,0\rangle\langle 10448,0\rangle\\
\langle 10461,0\rangle\langle 10532,0\rangle\langle 10546,0\rangle\langle 10575,0\rangle\langle 10589,0\rangle\langle 10790,0\rangle\langle 10804,0\rangle\langle 10833,0\rangle\langle 10847,0\rangle\langle 10917,0\rangle\\
\langle 10931,0\rangle\langle 10960,0\rangle\langle 10974,0\rangle\langle 11560,0\rangle\langle 11574,0\rangle\langle 11603,0\rangle\langle 11617,0\rangle\langle 11687,0\rangle\langle 11701,0\rangle\langle 11730,0\rangle\\
\langle 11744,0\rangle\langle 11945,0\rangle\langle 11959,0\rangle\langle 11988,0\rangle\langle 12002,0\rangle\langle 12072,0\rangle\langle 12086,0\rangle\langle 12115,0\rangle\langle 12129,0\rangle\langle 13870,0\rangle\\
\langle 13884,0\rangle\langle 13913,0\rangle\langle 13927,0\rangle\langle 13997,0\rangle\langle 14011,0\rangle\langle 14040,0\rangle\langle 14054,0\rangle\langle 14255,0\rangle\langle 14269,0\rangle\langle 14298,0\rangle\\
\langle 14312,0\rangle\langle 14382,0\rangle\langle 14396,0\rangle\langle 14425,0\rangle\langle 14439,0\rangle\langle 15025,0\rangle\langle 15039,0\rangle\langle 15068,0\rangle\langle 15082,0\rangle\langle 15152,0\rangle\\
\langle 15166,0\rangle\langle 15195,0\rangle\langle 15209,0\rangle\langle 15410,0\rangle\langle 15424,0\rangle\langle 15453,0\rangle\langle 15467,0\rangle\langle 15538,0\rangle\langle 15551,0\rangle\langle 15580,0\rangle\\
\langle 15594,0\rangle
\end{array}\right.$$

$$A_3 = \left[\begin{array}{l}
\langle 9,2\rangle\langle 54,0\rangle\langle 140,0\rangle\langle 183,0\rangle\langle 398,0\rangle\langle 441,0\rangle\langle 525,0\rangle\langle 568,0\rangle\langle 1168,0\rangle\langle 1211,0\rangle\langle 1295,0\rangle\langle 1338,0\rangle\\
\langle 1553,0\rangle\langle 1596,0\rangle\langle 1680,0\rangle\langle 1723,0\rangle\langle 3478,0\rangle\langle 3521,0\rangle\langle 3605,0\rangle\langle 3648,0\rangle\langle 3863,0\rangle\langle 3906,0\rangle\langle 3990,0\rangle\\
\langle 4033,0\rangle\langle 4633,0\rangle\langle 4676,0\rangle\langle 4760,0\rangle\langle 4803,0\rangle\langle 5018,0\rangle\langle 5061,0\rangle\langle 5145,0\rangle\langle 5188,0\rangle\langle 10409,0\rangle\langle 10452,0\rangle\\
\langle 10536,0\rangle\langle 10579,0\rangle\langle 10794,0\rangle\langle 10837,0\rangle\langle 10921,0\rangle\langle 10964,0\rangle\langle 11564,0\rangle\langle 11607,0\rangle\langle 11691,0\rangle\langle 11734,0\rangle\\
\langle 11949,0\rangle\langle 11992,0\rangle\langle 12076,0\rangle\langle 12119,0\rangle\langle 13874,0\rangle\langle 13917,0\rangle\langle 14001,0\rangle\langle 14044,0\rangle\langle 14259,0\rangle\langle 14302,0\rangle\\
\langle 14386,0\rangle\langle 14429,0\rangle\langle 15029,0\rangle\langle 15072,0\rangle\langle 15156,0\rangle\langle 15199,0\rangle\langle 15414,0\rangle\langle 15457,0\rangle\langle 15541,0\rangle\langle 15584,0\rangle
\end{array}\right.$$

$$A_4 = \left[\begin{array}{l}
\langle 24,1\rangle\langle 153,2\rangle\langle 411,2\rangle\langle 538,2\rangle\langle 1181,2\rangle\langle 1308,2\rangle\langle 1566,2\rangle\langle 1693,2\rangle\langle 3491,2\rangle\langle 3618,2\rangle\langle 3876,2\rangle\\
\langle 4003,2\rangle\langle 4646,2\rangle\langle 4773,2\rangle\langle 5031,2\rangle\langle 5158,2\rangle\langle 10422,2\rangle\langle 10549,2\rangle\langle 10807,2\rangle\langle 10934,2\rangle\langle 11577,2\rangle\\
\langle 11704,2\rangle\langle 11962,2\rangle\langle 12089,2\rangle\langle 13887,2\rangle\langle 14014,2\rangle\langle 14272,2\rangle\langle 14399,2\rangle\langle 15042,2\rangle\langle 15169,2\rangle\langle 15427,2\rangle\\
\langle 15554,2\rangle
\end{array}\right.$$

$$A_5 = \left[\begin{array}{l}
\langle 67,1\rangle\langle 454,0\rangle\langle 1224,0\rangle\langle 1609,0\rangle\langle 3534,0\rangle\langle 3919,0\rangle\langle 4689,0\rangle\langle 5074,0\rangle\langle 10465,0\rangle\langle 10850,0\rangle\langle 11620,0\rangle\\
\langle 12005,0\rangle\langle 13930,0\rangle\langle 14315,0\rangle\langle 15085,0\rangle\langle 15470,0\rangle
\end{array}\right.$$

$$A_6 = \langle 196,1\rangle\langle 1351,2\rangle\langle 3661,2\rangle\langle 4816,2\rangle\langle 10592,2\rangle\langle 11747,2\rangle\langle 14057,2\rangle\langle 15212,2\rangle$$

$$A_7 = \langle 581,1\rangle\langle 4046,2\rangle\langle 10977,2\rangle\langle 14442,2\rangle$$

$$A_8 = \langle 1736,1\rangle\langle 12132,2\rangle$$

$$A_9 = \langle 5201,2\rangle.$$

□

Nous remarquons que cette partition $\mathcal{P}$ est une extension d'une 8-partition spéciale de [5200] et vérifie aussi

$$\rho_{[1]}(w(\mathcal{P})) = s(2, 9).$$

Rappelons que nous avons une 8-partition de $[1, 5201]$.

5.5 Le cas $k = 10$

Pour $k = 10$, L'Inégalité (12) d'Abbott et Hanson

$$S(k + m) \geq 2 \cdot S(k) \cdot S(m) + S(k) + S(m),$$

avec $k = m = 5$ et $S(5) \geq 160$ donne :

$$\begin{aligned} S(10) &\geq 2 \cdot S(5) \cdot S(5) + S(5) + S(5) \\ &\geq 2 \times 160 \times 160 + 160 + 160 \\ &\geq 51520. \end{aligned}$$

Ce minorant

$$WS(10) \geq S(10) \geq 51520$$

est actuellement le meilleur disponible pour les deux nombres $WS(10)$ et $S(10)$.

6 Récapitulation

Pour notre recherche, nous avons utilisé un ordinateur portable avec CPU i7-2,6 Ghz, mais notre programme C++ utilise seulement un cœur (canal) du processeur. Nous rappelons que les temps d'exécutions dépendent de l'initialisation des recherches $r(k-1)$ dans la section 4.2.

Nous avons vu aussi que pour $2 \leq k \leq 9$, le mot correspondant à chaque meilleure k-partition spéciale de $[K_{sp}(k)]$ que nous avons trouvée est exactement le palindrome $s(2, k)$ si nous supprimons 1 dans ce mot.

k	$WS(k)$	*nombre* de partition maximal trouvées	$r(k-1)$	initialisation à partir des $(k-1)$-partitions de	Contrainte	temps d'exécution	RAM
4	$= 66$	4	23	$[1] - [23]$	–	$\simeq 1s$	$\simeq 12Mo$
5	≥ 196	3	66	$[1] - [66]$	–	$\simeq 26h$	$\simeq 12Mo$
6	≥ 582	13	11	$[185] - [196]$	–	$\simeq 3j : 5h$	$\simeq 12Mo$
7	≥ 1740	4	12	$[570] - [582]$	$s(2, 7)$	$\simeq 27mn$	$\simeq 15Mo$
8	≥ 5201	7	15	$[1725] - [1740]$	$s(2, 8)$	$\simeq 46mn$	$\simeq 30Mo$
9	≥ 15596	1	12	$[5189] - [5201]$	$s(2, 9)$	$\simeq 1h : 15mn$	$\simeq 150Mo$

Nous avons utilisé des intervalles spéciaux pour construire des partitions faiblement libres de sommes. Ces intervalles spéciaux sont des intervalles troués avec au plus deux trous, et ce sont aussi des ensembles faiblement libres de sommes maximaux inclus dans des intervalles particuliers. Comme tous les ensembles finis peuvent être écrits sous la forme $[x, y] \setminus C$, et peuvent être aussi considérés comme réunion de ces derniers, nous pouvons construire d'autres intervalles spéciaux faiblement libres de sommes avec plus de trois ou quatre trous pour élargir le champ de recherche des partitions avec les méthodes précédentes. Ainsi, nous retrouverons ces résultats et peut-être aussi d'autres meilleurs résultats.

Bibliographie

[1] H. L. Abbott and D. Hanson. A problem of Schur and its generalizations. *Acta Arith.*, 20 :175–187, 1972.

[2] H. L. Abbott and L. Moser. Sum-free sets of integers. *Acta Arith.*, 11 :393–396, 1966.

[3] Peter F. Blanchard, Frank Harary, and Rogério Reis. Partitions into sum-free sets. *Integers*, 6 :A7, 10, 2006.

[4] Pierre Bornsztein. On an extension of a theorem of Schur. *Acta Arith.*, 101(4) :395–399, 2002.

[5] S. Eliahou, J. M. Marín, M. P. Revuelta, and M. I. Sanz. Weak Schur numbers and the search for G. W. Walker's lost partitions. *Comput. Math. Appl.*, 63(1) :175–182, 2012.

[6] Shalom Eliahou, Cyril Fonlupt, Jean Fromentin, Virginie Marion-Poty, Denis Robilliard, and Fabien Teytaud. Investigating Monte-Carlo methods on the weak Schur problem. In *Evolutionary computation in combinatorial optimization*, volume 7832 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 191–201. Springer, Heidelberg, 2013.

[7] Geoffrey Exoo. A lower bound for Schur numbers and multicolor Ramsey numbers of K_3. *Electron. J. Combin.*, 1 :Research Paper 8, approx. 3 pp. (electronic), 1994.

[8] Harold Fredricksen and Melvin M. Sweet. Symmetric sum-free partitions and lower bounds for Schur numbers. *Electron. J. Combin.*, 7 :Research Paper 32, 9 pp. (electronic), 2000.

[9] Solomon W. Golomb and Leonard D. Baumert. Backtrack programming. *J. Assoc. Comput. Mach.*, 12 :516–524, 1965.

[10] Ronald L. Graham, Bruce L. Rothschild, and Joel H. Spencer. *Ramsey theory*. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization. John Wiley & Sons, Inc., New York, second edition, 1990. A Wiley-Interscience Publication.

[11] Robert W. Irving. An extension of Schur's theorem on sum-free partitions. *Acta Arith.*, 25 :55–64, 1973/74.

[12] Leo Moser and G. W. Walker. Elementary Problems and Solutions : Solutions : E985 (A Problem in Partitioning). *Amer. Math. Monthly*, 59(4) :253, 1952.

[13] D. Perrin and J.E. Pin. *Infinite Words : Automata, Semigroups, Logic and Games*. Number vol. 141 in Infinite words : automata, semigroups, logic and games. Elsevier, 2004.

[14] R. Rado. Some Solved and Unsolved Problems in the Theory of Numbers. *Math. Gaz.*, 25(264) :72–77, 1941.

[15] Stanisław P. Radziszowski. Small Ramsey numbers. *Electron. J. Combin.*, 1 :Dynamic Survey 1, 30 pp. (electronic), 1994.

[16] F. Rafilipojaona. Lien vers toutes les meilleures n-partitions spéciales (format python) que nous avons trouvées pour $4 \leq n \leq 9$. `https://drive.google.com/folderview?id=0B3t8vdlbd7b1fjBJWFUyUDI2NWVLX1dXbEpVTkJRZUJnNDJ1SnphT1FBY05QQUozZlI3RlU&usp=sharing`.

[17] F. Rafilipojaona. Lien vers toutes les meilleures n-partitions spéciales maximales (format Notation 47) que nous avons trouvées pour $4 \leq n \leq 9$. `https://drive.google.com/folderview?id=0B3t8vdlbd7b1fmZBWVVIbkw0UjNfQWVRU1YxSUNCUjJSUmRtbWVfNDQ1cC0xaG1UWkhsWTg&usp=sharing`.

[18] I. Schur. Uber die kongruenz $x^m + y^m \equiv z^m \pmod{p}$. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 25 :114–116, 1916.

[19] Alexander Soifer. Ramsey theory before Ramsey, prehistory and early history : an essay in 13 parts. In *Ramsey theory*, volume 285 of *Progr. Math.*, pages 1–26. Birkhäuser/Springer, New York, 2011.

F. RAFILIPOJAONA,
ULCO, LMPA J. Liouville, CS 80699 - 62228 Calais Cedex - France ;
e-mail : `fanasina@lmpa.univ-littoral.fr`